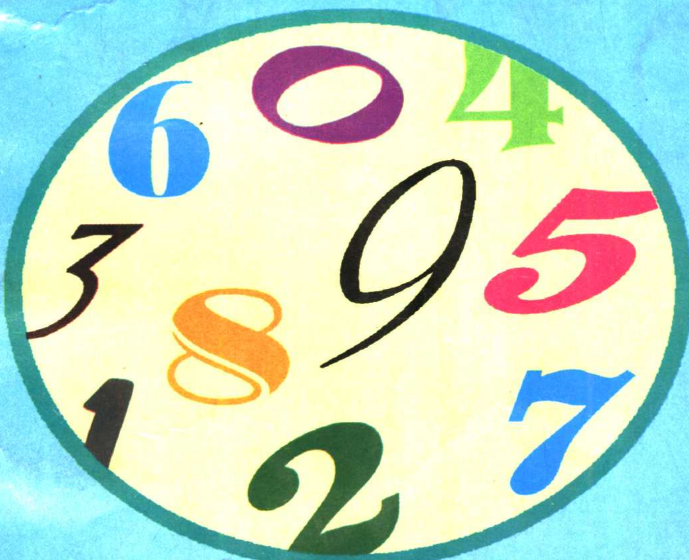
3

趣味数学丛书

趣味数学

(供小学6年级学生用)

汪江松　主编　　　汪江松　肖　铿　编著



湖北人民出版社

·趣味数学丛书·

趣味数学（三）

供小学 6 年级学生用

汪江松　主编　　　汪江松　肖　铿　编著

湖北人民出版社

鄂新登字 01 号

趣味数学丛书　　　　汪江松　主编

趣味数学(三)　　　　汪江松　肖　铿　编著

出版：
发行：湖北人民出版社

地址：武汉市解放大道新育村 33 号

邮编：430022

印刷：仙桃市新华印刷厂

经销：湖北省新华书店

开本：787×1092 毫米 1/32

印张：5.5

字数：115 千字

插页：1

版次：1996 年 11 月第 1 版

印次：1996 年 11 月第 1 次印刷

印数：1－8 140

定价：5.50 元

书号：ISBN 7－216－01984－9/O・10

前　言

华罗庚教授早在1959年《人民日报》上发表的《大哉数学之用》中就精彩地叙述过，“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁”，无处不用数学。因此，我们每个人从小都要学习数学，并且学好数学。

但是数学这门古老而又严肃的科学，有的人学起来饶有兴趣，有的人却不免感到头疼。

要学好数学，首先必须喜爱数学。兴趣是最好的动力。一本好书，循循善诱，引人入胜，常常对启发青少年学习数学的兴趣，激发他们对数学的爱好，关系极大。为此，我们特组织编写了这套《趣味数学丛书》。

本丛书试图以一种特别的，富有浪漫色彩的笔调，用古往今来的一些有趣的故事或游戏，向你介绍数学。其中不少精彩之处，读来令人拍案叫绝，读后还觉得回味无穷，令人陶醉。如果你能够品尝出个中之味，或很想多问几个为什么，甚至想探讨一个究竟，这就达到了作者的目的：“数学这一学科如此的严肃，我们应当千方百计地把它趣味化”（法国数学家帕斯卡语）。兴趣将激发你喜爱或更爱数学。

需要说明的是，对有些趣题或游戏，只要求你看懂，会操作就行。如果你一时尚不能探讨出个究竟，相信你通过以后的学习和钻研，将会明白其中的奥妙。

本丛书在编写过程中，收录了各类趣味数学资料中的一些有代表性的问题，在此，向有关作者、译者和出版单位表示衷心的感谢。

本册由肖铿、汪江松执笔，全书由汪江松统稿、定稿。限于编者的水平，错误与不足之处在所难免，敬请广大读者赐教。

本册供小学6年级学生使用。

汪江松

1996年夏于武昌

目　录

1　奇妙的等幂和

（一）

这里给出如下等式

$$123789+561945+642864$$
$$=242868+323787+761943 \qquad (1)$$

你可能觉得这个等式没有什么奇异，无非是左边的三个六位数之和等于右边的三个六位数之和．如果你观察得再仔细一点，你可能不难发现，每一个六位数有一个共同的特点：百位上与千位上的数字之和、十位上与万位上的数字之和、个位上与十万位上数字之和都等于10（其实这不是最本质的性质）．

这样，你可能更会觉得没有什么，甚至你也会构造出同样的数组，使它们的和相等．且慢，你再往下看．

将（1）式中等式两边的每一个数平方，等式两边三数的平方和也相等，即

$$123789^2+561945^2+642864^2$$
$$=242868^2+323787^2+761943^2 \qquad (2)$$

等式(2)，如果你有条件，可以用计算机验算一下．这时你大概已觉得有点奇妙吧？的确，这是一种“抹不掉的相等关系”．在我说“抹”的时候，你别忘记了一一验算．

现在请你把（1）、（2）两式中各个数的最左边的数码（十万位）都抹掉，剩下来的六个五位数，其相等关系仍奇妙地成立．即

$$\begin{aligned}&23789+61945+42864\\=&42868+23787+61943\\&23789^2+61945^2+42864^2\\=&42868^2+23787^2+61943^2\end{aligned}$$

这个等式用普通的计算器都可以验算它的正确性．你可能觉得这大概是偶尔的一次．那好，让我们再抹掉各个数的最左边的数码（即万位），奇怪的是，这种相等关系仍保持，即

$$3789+1945+2864=2868+3787+1943,$$

$$3789^2+1945^2+2864^2=2868^2+3787^2+1943^2.$$

就这样，一一地抹下去，不难发现，每次抹掉最左边的一位数码后，这种"相等"的关系，总是"坚贞不屈"地保留：

$$789+945+864=868+787+943,$$

$$789^2+945^2+864^2=868^2+787^2+943^2;$$

$$89+45+64=68+87+43,$$

$$89^2+45^2+64^2=68^2+87^2+43^2;$$

$$9+5+4=8+7+3,$$

$$9^2+5^2+4^2=8^2+7^2+3^2.$$

这时你可能会拍案称奇了吧．别忙，我们再将（1）、（2）两式从最右边逐步一一抹掉一个数码试试看，这种相等居然照样保留．

$$\begin{aligned}&12378+56194+64286\\=&24286+32378+76194,\end{aligned}$$

$$12378^2+56194^2+64286^2$$
$$=24286^2+32378^2+76194^2;$$
$$1237+5619+6428$$
$$=2428+3237+7619,$$
$$1237^2+5619^2+6428^2$$
$$=2428^2+3237^2+7619^2;$$
$$123+561+642=242+323+761,$$
$$123^2+561^2+642^2=242^2+323^2+761^2;$$
$$12+56+64=24+32+76,$$
$$12^2+56^2+64^2=24^2+32^2+76^2;$$
$$1+5+6=2+3+7,$$
$$1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2.$$

现在我们将（1）、（2）两式中各数相同的数位上的数抹掉，试试看.

同时抹掉千位和十位上的数码，有

$$1279+5695+6484=2488+3277+7693$$
$$1279^2+5695^2+6484^2=2488^2+3277^2+7693^2;$$

同时抹掉万位和个位上的数码，有

$$1378+5194+6286=2286+3378+7194,$$
$$1378^2+5194^2+6286^2=2286^2+3378^2+7194^2;$$

同时抹掉万位、百位、个位上的数码，有

$$138+514+626=226+338+714,$$
$$138^2+514^2+626^2=226^2+338^2+714^2;$$

同时去掉中间的四个数位，仍有

$$19+55+64=28+37+73,$$
$$19^2+55^2+64^2=28^2+37^2+73^2.$$

这种“抹不掉”的相等关系，真是奇、趣、美俱全，叫人流连忘返.

而且（1）、（2）式的奇趣具有“旋转性”，即将各数后面的数移到前面仍存在这种“抹不掉”的相等关系.

（二）

让我们再来看两组自然数：

1，6，7，23，24，30，38，47，54，55；

2，3，10，19，27，33，34，50，51，56.

首先，还是把它们逐一相加，你会发现

$$1+6+7+23+24+30+38+47+54+55$$
$$=2+3+10+19+27+33+34+50+51+56$$

这也许你会认为不足为奇，因为太平淡了，任何人都能凑得出这类数字，甚至更多，更大.

现在请你把这个等式两边的每个数，平方，求和，它们的平方和也相等，即

$$1^2+6^2+7^2+23^2+24^2+30^2+38^2+47^2+54^2+55^2$$
$$=2^2+3^2+10^2+19^2+27^2+33^2+34^2+50^2+51^2+56^2.$$

将上式中的平方改为立方试试，等式仍然成立.

$$1^3+6^3+7^3+23^3+24^3+30^3+38^3+47^3+54^3+55^3$$
$$=2^3+3^3+10^3+19^3+27^3+33^3+34^3+50^3+51^3+56^3.$$

这时你会猜测，更高次方的和是否成立呢？是否任何次方的和都相等呢？如果你有兴趣的话，可以继续做下去，发现有

$$1^4+6^4+7^4+23^4+24^4+30^4+38^4+47^4+54^4+55^4$$
$$=2^4+3^4+10^4+19^4+27^4+33^4+34^4+50^4+51^4+56^4;$$

……

$$1^8+6^8+7^8+23^8+24^8+30^8+38^8+47^8+54^8+55^8$$
$$=2^8+3^8+10^8+19^8+27^8+33^8+34^8+50^8+51^8+56^8.$$

然而，这些数字的 9 次幂之和就不相等了.

上面这种相等的关系，人们把它叫做等幂和. 为了方便读者的验证和审核，现将这两组数的各次幂的和附录如下：

一次等幂和为	285；
二次等幂和为	1 1685；
三次等幂和为	53 6085；
四次等幂和为	2604 3813；
五次等幂和为	13 0975 3125；
六次等幂和为	673 3400 6085；
七次等幂和为	3 5122 6154 7765；
八次等幂和为	185 0394 7177 3893.

这两组奇妙的数字，现在还不知道最先是谁发现的. 在数学史上，还有很多没有留下姓名的发现者，他们为科学的发展作出了无私的奉献.

练一练

1. 给出下列数组

(1) 312，756，867 与 423，534，978；

(2) 8531，4115，3326 与 7322，6533，2117；

(3) 356672，767126，812567 与 434783，578234，923348

考查各题之间的两组数的一次幂、二次幂的和是否相等，是否也具有“抹不掉的相等关系”.

2. 下面四组二次等幂和也十分有趣，你能根据已知等式找出各组的规律吗？并请你将各组式子中的第四个等幂式补全且再续写一式.

(1) $3^2+4^2+12^2=13^2$;

$4^2+5^2+20^2=21^2$;

$5^2+6^2+30^2=31^2$;

$7^2+(\quad)^2+(\quad)^2=(\quad)^2$.

(2) $2^2+3^2+4^2+9^2=5^2+6^2+7^2$;

$3^2+4^2+5^2+12^2=7^2+8^2+9^2$;

$4^2+5^2+6^2+15^2=9^2+10^2+11^2$;

$5^2+6^2+(\quad)^2+(\quad)^2=(\quad)^2+(\quad)^2+(\quad)^2$.

(3) $1^2+4^2+6^2+7^2=2^2+3^2+5^2+8^2$;

$2^2+5^2+7^2+8^2=3^2+4^2+6^2+9^2$;

$3^2+6^2+8^2+9^2=4^2+5^2+7^2+10^2$;

$7^2+(\quad)^2+(\quad)^2+(\quad)^2=(\quad)^2+(\quad)^2+(\quad)^2+(\quad)^2$.

(4) $3^2+4^2=5^2$;

$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$;

$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$;

$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=(\quad)^2+(\quad)^2+(\quad)^2+(\quad)^2$.

答　案

1. 具有“抹不掉的相等关系”.

2. (1) $7^2+8^2+56^2=57^2$; $8^2+9^2+72^2=73^2$, ….

(2) $5^2+6^2+7^2+18^2=11^2+12^2+13^2$;

$6^2+7^2+8^2+21^2=13^2+14^2+15^2$; ….

(3) $4^2+7^2+9^2+10^2=5^2+6^2+8^2+11^2$;

$5^2+8^2+10^2+11^2=6^2+7^2+9^2+12^2$;

……

$7^2+10^2+12^2+13^2=8^2+9^2+11^2+14^2$;

$8^2+11^2+13^2+14^2=9^2+10^2+12^2+15^2$;

……

(4) $36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$

2　有趣的 9 摆尾

妈妈让小琴上街去买洗衣用的肥皂．在商店里，售货员用一张旧书刊纸把肥皂包好交给了小琴．快到家的时候，她瞟了一眼这张包装纸，上面居然有一道思考题：

有两个一位数的数字，这两数的和加上这两数的积等于 39．求这两个数．

她好不高兴，一到家就拿起纸笔画了起来．在七画八画之中，她竟摸出了这么个道道来：

$$0+9+0\times9=9$$
$$1+9+1\times9=19$$
$$2+9+2\times9=29$$
$$3+9+3\times9=39$$
$$4+9+4\times9=49$$
$$5+9+5\times9=59$$
$$6+9+6\times9=69$$
$$7+9+7\times9=79$$
$$8+9+8\times9=89$$
$$9+9+9\times9=99$$

这些都是两个一位数，只要其中一个为 9，则它们的和加上它们的积，结果的个位数也为 9．小琴把它叫做“9 摆尾”．

她像发现新大陆似的，高兴得又是唱又是跳，并马上跑

去告诉了她的好友小明、小红和小琳.

四位小朋友也为这一有趣的发现而高兴.

小红说，上面这10个等式排列整齐，很有规律，我们再往下算算看：

$$10+9+10\times9=109$$

$$11+9+11\times9=119$$

$$12+9+12\times9=129$$

$$13+9+13\times9=139$$

……

$$21+9+21\times9=219$$

……

$$130+9+130\times9=1309$$

……

还真的有这么一个规律了，这种规律用数学语言怎么叙述呢？

小明说，设一个数为 a，另一个数当然是9，那么

$$a+9+a\times9=10a+9 \tag{1}$$

这里数 a 的10倍再加上9，实际上就只要将9接写在 a 的后面就行了.

例如

$$547+9+547\times9$$

用不着再先一步步计算，只要在547后面添上9，得5479，就是它的正确结果.

大家都一个个点头称是.

小琴说，这么一说，凡是任何个位数是9的数，按照公式（1），可把它拆成9与去9以后的另一个数，并且原来的

数等于这两个数的和加上这两个数的积．如

$$8759=875+9+875\times 9$$

小明说，完全正确，因为公式（1）既可正用，也可以倒过来用．

小琳说，这个问题算是解决了，但是那道思考题的答案是什么呢？

小琴说，那不就是 3 和 9 嘛，这还用问．

小琳说，就这么简单吗？还有没有别的解．

小红说，好像 4 和 7 也行，你们看

$$4+7+4\times 7=39$$

还有没有别的数也合乎要求呢？那就难得凑了．

小明说，用解方程的方法试一试．

设所求的两个数为 a 和 b，依题意得

$$a+b+a\times b=39 \tag{2}$$

$$a(1+b)=39-b$$

$$a=\frac{39-b}{1+b}=\frac{40-(1+b)}{1+b}=\frac{40}{1+b}-1$$

即

$$a=\frac{40}{1+b}-1 \tag{3}$$

因为 a，b 为整数，且不为 0，只要 $1+b$ 是 40 的约数就行．此时，b 可取 1，3，4，7，9，19；依（3）式，相应得 a 的值为 19，9，7，4，3，1．

列表如下：

a	19	9	7	4	3	1
b	1	3	4	7	9	19

上面的 6 组数即为方程（2）的 6 组解．因为原题只要求找出