普通高等教育基础课规划教材

# 离散数学基础

谢绪恺 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

# 离散数学基础

谢绪恺　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书主要介绍离散数学中的四部分内容：集合论，数理逻辑，图论和近世代数。共计九章，每章后有习题，书末附习题答案及提示。

本书的读者对象主要是：缺乏数学预备知识的初学者。主要目的是：讲清楚相关的数学概念究竟在实际中是什么意义，说明白相关的数学问题如何从实际中被归纳出来。

本书可作为大专院校特别是网络学院计算机专业或相关专业的教材，也可供有兴趣的科技工作者自学或参考。

**图书在版编目（CIP）数据**

离散数学基础/谢绪恺编著. —北京：机械工业出版社，2005.8
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 7-111-17074-1

Ⅰ. 离 ...　Ⅱ. 谢 ...　Ⅲ. 离散数学 - 高等学校 - 教材
Ⅳ. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 086566 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郑　丹　版式设计：张世琴　责任校对：张　媛
责任编辑：郑　玫　封面设计：赵　晶　责任印制：杨　曦
北京机工印刷厂印刷
2005 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
1000mm × 1400mm B5 · 6.375 印张 · 245 千字
定价：18.00 元

# 前　　言

如何让初学者跨进离散数学的“门槛”？对于初学者而言，离散数学难在何处？这些问题挥之不去，可谓才下眉头，又上心头。

如果第二个问题解决了，第一个问题也就不攻自消。离散数学难在，一是概念抽象，二是难于巩固。这大概正是困扰初学者的两个最大问题。为初学者排除这两个困难，是作者的心愿。因此，本书写作的主旨是：

- 抽象问题具体化，数学问题工程化。这既可说清楚抽象概念的实际意义，又能讲明白数学问题的实际来源。
- 处处强调，步步深入。一些重要概念在多处反复强调，一些重要问题在多处逐步深入。这既可化解难点，又能达到加深理解、巩固提高的目的。

此外，书中例题很多。毫无疑义，这将有助于实现本书的写作目的。

在本书编写过程中，东北大学张庆灵教授、荆海英教授、天津大学张国山教授、大连大学赵植武教授、辽宁工程技术大学盖如栋教授、沈阳大学原宗虎教授、沈阳理工大学王凯副教授、空军后勤学院滕敏发副教授或提供素材，或坦陈己见，给予了作者真诚的支持。对此，一并致以衷心的感谢。

作者能了此心愿，机械工业出版社功莫大焉，这绝非只说一声感谢就能不了了之的。

作者自恐学业不精，原定目标恐难中的，缺点疏漏又在所难免，敬请读者赐教。

**作　者**

# 目　　录

前言

## 第1篇　集　合　论



## 第2篇　数理逻辑



## 第3篇　图　　论

# 第4篇 近世代数

# 第1篇 集 合 论

在现时，研究任何数学问题，稍加深入，很难不用到集合论。它是19世纪80年代德国数学家康托尔创立的，已对当今数学的发展产生了深远的影响。计算机数学也不例外。

# 第1章 集 合

## 1.1 基本概念

什么是集合？一些事物汇集起来，形成一个整体，就称为集合。这不是定义。集合是要作为原始概念来接受的，如几何中的点、线等概念。

像“网络学院的全体学生”，“书架上的书”，“一群象”等都是集合。其中的个别事物称为该集合的元素。下面再举一些数学方面的例子。

**例1** 二进制的基数集合：$\{0, 1\}$。

**例2** 长度为2的二进制串组成的集合：$\{00, 01, 10, 11\}$。

**例3** 全体正整数组成的集合：$\{1, 2, 3, \cdots\}$。

**例4** 方程 $(x-1)^2(x+1)=0$ 所有的根组成的集合：$\{-1, 1\}$。

在上例中，该方程实际上有三个根：$-1$，$1$，$1$，后两者是重根。但按集合论的规定，组成集合的元素应是能相互区别的，所以其根的集合不是 $\{-1, 1, 1\}$。另外，集合中元素的先后次序没有关系，集合 $\{-1, 1\}$ 也可写成 $\{1, -1\}$。

习惯用大写字母 $A$、$B$ 等表示集合，用小写字母 $a$、$b$ 等表示元素。如元素 $a$ 属于集合 $A$，则记作 $a \in A$；不属于则记作 $a \notin A$。

### 1.1.1 集合的表示

集合有两种基本的表示方法。

(1) 列举法。在可能情况下，将集合中的元素一一列举出来，如

$$A=\{2, 4, 6, 8\}$$

或者列出足够多的元素足以表示集合中元素的特征，如

$$B=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

(2) 描述法。设法用文字或符号给出集合中元素的特征性质，如上面的集合 $A$ 可表示为

$$A = \{x \mid x \text{ 为偶数}, x < 10\}$$

读作 $A$ 为小于 10 的偶数的集合。其中的 $x$ 是用来泛指集合的一般元素，无特殊意义，用 $y$ 或其他字母都一样。依此，上面的集合 $B$ 可表示为

$$B = \{x \mid x \text{ 为正整数}\}$$

需要指出，有些集合不可能用列举法表示，如介于 0 与 1 之间全体实数组成的集合。但用描述法可表示为

$$C = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \in \mathbf{R}\}$$

### 1.1.2 子集

如果集合 $A$ 的每个元素都是集合 $B$ 的元素，则称 $A$ 为 $B$ 的一个子集，或 $A$ 包含于 $B$，或 $B$ 包含 $A$，记作

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

如 $A$ 不是 $B$ 的子集，即 $A$ 中有元素不属于 $B$，则记作 $A \not\subseteq B$，或 $B \not\supseteq A$。

如果 $A$ 包含于 $B$，而 $B$ 也包含于 $A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A = B$。由此可知，两个集合相等，当且仅当它们的元素完全相同，自然个数也相等。

如果 $A$ 包含于 $B$，而 $B$ 不包含于 $A$，则称 $A$ 为 $B$ 的真子集。这就是说，$B$ 的元素比 $A$ 多，且包含了 $A$ 中所有的元素。这时记作 $A \subset B$，或 $B \supset A$。

研究集合：$A = \{4, 0, 1, 2, 3\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$，$C = \{2, 1, 4, 3\}$，$D = \{2, 5\}$。对比之后，不难看出，其中存在如下的关系，即

$$A \supset B, \quad B = C, \quad D \not\subseteq A, \quad D \not\subseteq B$$

### 1.1.3 全集与空集

在研究具体问题时，通常会涉及到若干个集合，将所有这些集合的元素合起来构成的集合，称为全集，本书用 $E$ 表示。由上面叙述可知，全集是个相对的概念，是针对具体问题而规定的。例如，在研究平面几何时，可取由全平面上的所有的点构成的集合为全集。在研究学生的学习问题时，视具体情况可取一个班乃至若干个班的学生为全集。

同全集相反，不含任何元素的特定集合，称为空集，记作 $\varnothing$，$\varnothing = \{\ \}$，即括号中没有任何元素。易知，$\varnothing$ 是任何集合的子集。

根据以上的论述，不难得到下列的结果：

(1) 对任意集合 $A$，有 $A \subseteq A$。

(2) 对任意集合 $A$，有$\varnothing \subseteq A \subseteq E$。

(3) 如 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$。

(4) $A = B$ 当且仅当$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

## 1.2　基本运算

数量可以进行加、减、乘、除等运算。集合也有自己相应的运算。现分述如下：

### 1.2.1　并运算

给定两个集合 $A$ 和 $B$，由这两个集合所有元素组成的集合，称为它们的并集（或和集），记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

其中$\cup$称为并运算。

例如，$A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{3, 4\}$，则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

### 1.2.2　交运算

给定两个集合 $A$ 和 $B$，由此两集合的公有元素组成的集合，称为它们的交集，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

其中$\cap$称为交运算。在上例中，

$$A \cap B = \{3\}$$

### 1.2.3　差运算

给定两个集合 $A$ 和 $B$，从 $A$ 中减去两者公有的元素后组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的差集，或 $B$ 对于 $A$ 的补集，记作 $A - B$，即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

其中 $-$ 称为差运算。

例如，设 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{3, 4\}$，$C = \{4, 5\}$，则

$$A - B = \{1, 2\},\quad A - C = \{1, 2, 3\},\quad B - C = \{3\}$$

不难看出

$$A - B = A - A \cap B$$

以上三种基本运算会经常用到。为加深理解，特举例说明如下。

设有某班学生，他们成立了一个合唱队和一个体操队。有部分学生既是合

唱队员又是体操队员。现用 $A$ 表示合唱队集合，$B$ 表示体操队集合，则

$A \cup B$ = 合唱队学生与体操队学生加起来组成的集合。

$A \cap B$ = 既是合唱队员又是体操队员（具有双重身份）的学生组成的集合。

$A - B$ = 只参加了合唱队（单重身份）的学生组成的集合。

上面说过，$A$ 与 $B$ 的差集，即 $A - B$，又称为 $B$ 对于 $A$ 的补集。$B$ 的补集有什么含义呢？首先，从上面最后的等式立即可知

$$(A - B) \cap B = \varnothing$$

就是说，$B$ 的补集与 $B$ 没有共同的元素，交集为零。其次

$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

这就是说，$B$ 对于 $A$ 的补集与 $B$ 的并集正好等于 $A$ 与 $B$ 的并集。在此情况下，如取 $A \cup B$ 为全集的话，则可以说，$B$ 的补集与 $B$ 的并集等于全集。对于全集的补集，相当重要，下面将作进一步的论述。

### 1.2.4 绝对补集

设 $E$ 为全集，则 $B$ 对于 $E$ 的补集，称为绝对补集，记作 $B'$。即

$$B' = E - B = \{x \mid x \in E \text{ 且 } x \notin B\}$$

在上例中，若取合唱队与体操队的和集为全集，则合唱队的绝对补集为只具单重身份的体操队员所组成的集合。反之，体操队的绝对补集为只具单重身份的合唱队员所组成的集合。如设正整数全体组成的集合为全集，则正偶数集合的绝对补集为正奇数集合，而正奇数集合的绝对补集为正偶数集合。两者的并集正好是正整数集合。就是说，两者是互补的。

利用补集，可得到一些重要的结论。仍以合唱队、体操队作为例子。设全集 $E = A \cup B$，其中 $A$ 表示合唱队，$B$ 表示体操队。现在想求出既是合唱队员又是体操队员的集合。设此集合为 $C$。显然有

$$C = A \cap B$$

但利用补集的概念还可求出 $C$ 的另外一种表示方法。读者不妨一试。将两种表示式等同起来，事实上就是非常有用的德摩根律。这在不久就会讲到。值得指出，一件客观事实，往往存在不只一种的表达方式，不同的表达方式分别用数学符号刻画出来，就会得到等式或恒等式。

## 1.3 几个定理

下述的几个定理，有些是不证自明的，有些将予以说明，而无需证明。

**定理 1** 设 $A$、$B$、$C$ 是任意三个集合，则

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(3) $A \cup A = A$

(4) $A \cup \varnothing = A$

(5) $A \subseteq A \cup B$

(6) $A \cup E = E$

**定理 2**　设 $A$、$B$、$C$ 为任意三个集合，则下列分配律成立：

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**例 1**　现在要把一班和二班的女同学挑选出来。这有两种做法：其一是分别从一班和二班挑选；其二是把两个班合起来挑选。用 $A$、$B$、$C$ 分别代表女同学集合、一班集合、二班集合，那上述两种方法的数学表达正好就是定理 2 式 (1) 的右左两边。需要指出，其中的女同学集合 $A$ 是泛指的，可以是全校的女同学，但至少应包括两个班的全部女同学。

**例 2**　设舞蹈队同合唱队联合进行表演之后，又同体操队联合进行表演，问哪些队员先后进行了两次表演？用 $A$、$B$、$C$ 分别代表舞蹈队、合唱队、体操队，则定理 2 式 (2) 右边就是问题的答案。易知，上式左边也正是此问的答案。因此，两边相等。

应该强调，以上两例只是对于定理的实际含义的一种说明，并非证明。当然，就数学应用而言，了解数学结论的实际含义是非常重要的。据此，也易于给出其相应的证明。

**定理 3**　设 $A$、$B$ 为任意两个集合，则下列等式成立：

(1) $A - B = A \cap B'$

(2) $A - B = A - (A \cap B)$

此定理也有相应的实际含义，读者不妨一试，予以说明。下述定理很重要，请多注意。

**定理 4**　设 $A$、$B$ 为任意两集合，则下述德摩根律成立：

(1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(2) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

用语言描述，则式 (1) 为并集的补集等于补集的交集，而式 (2) 为交集的补集等于补集的并集。但需要强调的依然是这些等式的实际含义。

设 $A$ 代表合唱队，$B$ 代表体操队，$E$ 代表全集，且 $E$ 至少大于或等于 $A$ 与 $B$ 的并集，即 $E \supseteq (A \cup B)$。依此可知，式 (1) 左边的含义是：除去合唱队和体操队两队的全部同学余下的同学。答案自然是：既非合唱队的又非体操队的同学，而这正是等式右边所表示的。因为 $A'$ 代表不是合唱队的同学，$B'$ 代表不是体操队的。它们的交集当然代表两者都不是的同学。

对式（2）的实际含义的解释，我们留给读者。但要指出，上面两个等式事实上是互为对偶的。因为本定理对任意的两个集合都成立，就是说，我们可以把等式（1）中的 $A$ 与 $B$ 分别换成 $A'$ 与 $B'$，由此得到

$$(A' \cup B')' = A \cap B$$

两边再求补集，结果是等式（2）。

德摩根定律用途广泛，是个重要的结论。原因之一是：对同一客观事实找到了两种不同的数学表达方式。原因之二是："补"的概念是非常广泛的。例如，"合唱队"与"非合唱队"是互补的。推而广之，电路的"断开"与"闭合"是互补的；"是"与"不是"是互补的；"存在"与"不存在"是互补的，如此等等。而凡是遇到互补的事物，此定律一般都有用，但表达方式必须作相应变化。

## 1.4 文氏图

利用图形来表示集合既形象直观，又富于启发性，有很多优点。这种图形

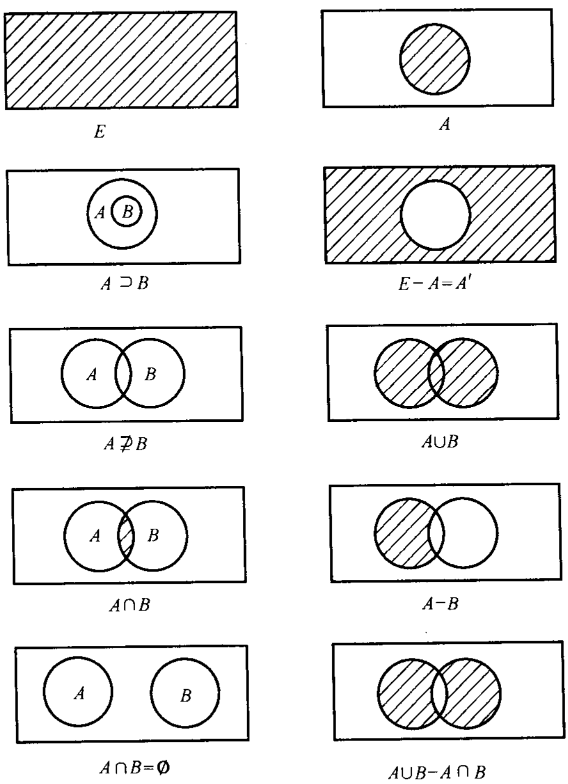


图 1－1

常被称为文氏图。

在文氏图中，全集 $E$ 用矩形表示，其余集合则用矩形内的圆表示，运算结果的集合用阴影区域表示。常见的集合运算文氏图如图 1-1 所示。

就实用角度而言，借助文氏图探讨集合论的问题是可取的，但决不能用来作为论据。

## 1.5　笛卡尔积

讲述集合的并、交、差等运算之后，容易想到集合能否进行相乘的运算。例如，下列两个集合

$$A=\{张,王,李\},\ B=\{1,2,3\}$$

能否相乘？需要强调，只要实际有用，就会产生相应的数学。

### 1.5.1　序偶

在讲集合的乘法之前，有必要介绍一个重要的概念：序偶。回忆一下直角坐标系，点的坐标常用符号 $(a,b)$ 表示，其中 $a$ 和 $b$ 分别代表点的横坐标和纵坐标。而这里的 $(a,b)$ 正是将要讲到的序偶。为明确起见，给出如下定义。

**定义 1**　两个按一定次序排列的元素 $a$ 和 $b$ 所组成的有序序列，称为序偶，记作 $(a,b)$。

首先，序偶中元素的次序不能改变，改变后就变成了另一序偶，即 $(a,b)\neq(b,a)$。两个序偶 $(a,b)=(c,d)$，当且仅当 $a=c$ 及 $b=d$。

其次，序偶的概念可以推广。如三维空间中的三元组 $(a,b,c)$，$n$ 维空间中的 $n$ 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。

有了序偶的概念，下面就来阐述集合的乘法。

**定义 2**　设 $A$ 与 $B$ 是两个集合，若序偶的第一个元素属于 $A$，第二个属于 $B$，则所有这样的序偶组成的集合称为 $A$ 和 $B$ 的笛卡尔积，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A 且 b\in B\}$$

**例 1**　设 $A=\{张,王\}$，$B=\{李,刘\}$，则

$$A\times B=\{(张,李),(张,刘),(王,李),(王,刘)\}$$
$$B\times A=\{(李,张),(李,王),(刘,张),(刘,王)\}$$

由此看出，$A\times B\neq B\times A$，且 $(A\times B)\cap(B\times A)=\varnothing$。另外，尽管笛卡尔积的元素都是序偶，但它本身是个集合，其中的元素是可以自由排列的。

**例 2**　设 $A=\{沈,大\}$，$B=\{辽\}$，求 $A\times A$，$A\times B$，$(A\times A)\times B$，$A\times(A\times B)$。

**解**　根据定义，有

$A \times A=\{$(沈，沈)(沈，大)，(大，沈)，(大，大)$\}$

$A \times B=\{$(沈，辽)，(大，辽)$\}$

$(A \times A) \times B=\{$((沈，沈)，辽)，((沈，大)，辽)，

((大，沈)，辽)，((大，大)，辽)$\}$

$A \times (A \times B)=\{$(沈，(沈，辽))，(沈，(大，辽))，

(大，(沈，辽))，(大，(大，辽))$\}$

从例 1 可以看出，笛卡尔积不满足交换律，从例 2 看出，它也不满足结合律。这是有道理的。比如，(沈，大) 可用来表示沈阳队在主场迎战大连队，(大，沈) 表示大连队在主场迎战沈阳队，((沈，大)，辽) 表示沈阳队与大连队赛后再迎战辽宁队等。它们被赋予各自不同的含义后，虽然一些定律如交换律和结合律不满足了，但应用性却增加了。

笛卡尔积不满足交换律和结合律，但满足分配律。实际上存在如下的定理。

### 1.5.2 一个定理

设 $A$、$B$、$C$ 为任意三个集合，则

(1) $A \times (B \cup C)=(A \times B) \cup (A \times C)$

(2) $A \times (B \cap C)=(A \times B) \cap (A \times C)$

(3) $(A \cup B) \times C=(A \times C) \cup (B \times C)$

(4) $(A \cap B) \times C=(A \times C) \cap (B \times C)$

此定理的证明思路是：设任一序偶 $(x, y)$ 属于上列某等式的一边，证它必属于此等式的另一边。具体的步骤在这里就不赘述了，但如读者举例直接验证其中的一个等式的话，则有可能自己找到定理的证明。

笛卡尔积的上述概念可以推广，有如序偶一样，直到包含 $n$ 个集合。

**定义 3** 设 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 是任意 $n$ 个集合，则集合

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, \\ i=1, 2, \cdots, n\}$$

称为 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 的笛卡尔积，简记为 $\prod_{i=1}^{n} A_i$。当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，简记为 $A^n$。

**例 3** 在计算机里的字是由长度为 $n$ 的二进制串组成的，它的全体可以表示为

$$A^n=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, i=1, 2, \cdots, n\}$$

其中集合 $A=\{0, 1\}$。

**例 4** 设 $A$，$B$，$C$，$D$ 是四个非空集合，试证明：$A \times B \subseteq C \times D$ 的充要条

件是 $A \subseteq C$，$B \subseteq D$。

**证明**　必要性。设 $A \times B \subseteq C \times D$，则对 $\forall x \in A$ 和 $\forall y \in B$，有

$$(x, y) \in A \times B$$
$$\Rightarrow x \in C \text{ 且 } y \in B$$

从而得 $A \subseteq C$，$B \subseteq D$。

充分性。设 $A \subseteq C$，$B \subseteq D$，则对 $\forall x \in A$，$\forall y \in B$，有

$$(x, y) \in A \times B \Rightarrow (x, y) \in C \times D$$

从而得 $A \times B \subseteq C \times D$。

## 1.6　习题

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 大于 1 而小于 15 的偶数。

(2) 50 的正因子集合。

(3) 满足方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 且 $x > 2$ 的解的集合。

(4) 满足方程 $x^2 + 1 = 0$ 且 $x$ 为实数的集合。

(5) 既大于零又小于零的实数。

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 大于 2 小于 100 的奇数。

(2) 大于 5 的自然数。

(3) 在直角坐标系下，单位圆内部的点集以及圆周上的点集。再有，两者的和集。

(4) 方程 $x^3 - 1 = 0$ 的根且是自然数。

(5) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

3. 下列集合中哪些是相等的？

(1) $\{1, 2, 3, a, b, c\}$

(2) $\{a, 1, c, 2, a, 3, b, 2\}$

(3) $\{x \mid x^2 - 1 = 0, x < 2\}$

(4) $\{x \mid (x^2 - 1)^2 = 0, x < 3\}$

4. 判断下列各式是否正确。

(1) $\emptyset \in \emptyset$　(2) $\emptyset \subseteq \emptyset$　(3) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(4) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$　(5) $\emptyset \in \{a\}$

(6) $\emptyset \subseteq \{a\}$　(7) $\{a\} \in \{a, b\}$

(8) $\{a\} \subseteq \{a, b\}$

5. 已知 $A=\{0, 1\}$，$B=\{x \mid x^3+x=0\}$，证明 $A$ 不是 $B$ 的子集。

6. 在下列各题中，哪些正确？哪些错误？哪些可满足？

(1) 若 $a \in A$，则 $a \in A \cup B$

(2) 若 $a \in A$，则 $a \in A \cap B$

(3) 若 $a \in A$，则 $a \in A - B$

(4) 若 $a \in A$，则 $a \in B - A$

(5) 若 $a \in A \cup B$，则 $a \in A$

(6) 若 $a \in A \cap B$，则 $a \in A$

(7) 若 $a \in A - B$，则 $a \in A$

(8) 若 $a \in B - A$，则 $a \in A$

(9) 若 $A \cap B = A$，则 $A \subseteq B$

(10) 若 $A \cap B = A$，则 $B \subseteq A$

7. 已知 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{4, 5, 6, 7\}$，$C=\{5, 6, 7, 8, 9\}$，$D=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，全集 $E=\{1, 2, \cdots, 9\}$，求：

(1) $A \cup B$ 和 $A \cap B$

(2) $A \cup C$ 和 $A \cap C$

(3) $B \cup D$ 和 $B \cup D$

(4) $B \cup C$ 和 $B \cap C$

8. 集合 $A$，$B$，$C$，$D$ 及全集 $E$ 同上，求：

(1) $A'$，$B'$，$C'$，$D'$

(2) $A-B$，$B-A$，$B-C$，$C-A$

(3) $A \cap (B \cup D)$

(4) $(A \cap B)'$

(5) $A' \cup B'$

9. 试举例说明：当 $B \neq C$ 时，仍可能成立 $A \cap B = A \cap C$，以及 $A \cup B = A \cup C$。

10. 试化简下列集合表示式：

(1) $((A \cup B) \cap B) - (A \cup B)$

(2) $C \cup ((A \cup B \cup C) - (A \cup B))$

11. 在文氏图上，用阴影表示下列集合：

(1) $A \cap B'$　　(2) $(B-A)'$

(3) $(A \cap B)'$　　(4) $A' \cup B'$

12. 设 $A$，$B$，$C$ 是三个集合，试绘制文氏图验证：

(1) $(A-B)-C = A-(B \cup C)$

(2) $(A \cap B)-(A \cap C) = A \cap (B-C)$

(3) $A-B=A\cap B'$

13. 设 $A$ 表示班上所有的合唱队员，$B$ 表示所有的体操队员，$C$ 表示所有的舞蹈队员。试据此说明上题三个等式的实际含义及合理性。这时可取全班作为全集 $E$。

14. 试根据德摩根律证明：

(1) $(A\cup B\cup C)'=A'\cap B'\cap C'$

(2) $(A\cap B\cap C)'=A'\cup B'\cup C'$

上式可以推广到含有 $n$ 个集合的情况，统称为广义德摩根律。

15. 试参照第 13 题的说明解释上题的等式。

16. 试参照第 13 题的说明解释下列命题的正确性：

(1) $A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cap B'=\varnothing$

(2) $A\subseteq B$ 当且仅当 $A'\cup B=E$

(3) $A\subseteq B$ 当且仅当 $B'\subseteq A'$

(4) $A\subseteq B$ 当且仅当 $A-B=\varnothing$

并绘制文氏图验证。

17. 能否根据上题的结论推出下列各式？

(1) $A-B=A\cap B'$

(2) $(A-B)'=A'\cup B$

并绘制文氏图验证。

18. 设集合 $A=\{1, 2\}$，$B=\{a, b\}$，试求 $A\times A$，$A\times B$，$B\times A$，$B\times B$。

19. 设集合 $A=\{1, 2\}$，$B=\{3, 4\}$，$C=\{4, 5\}$，求：

(1) $A\times B\times C$

(2) $(A\times B)\times C$

(3) $A\times(B\times C)$

回答：上列三个笛卡尔积是否相等？并举例说明。

20. 设 $A$，$B$，$C$ 为任意的有限集，试举例验证：

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

并据此予以证明。