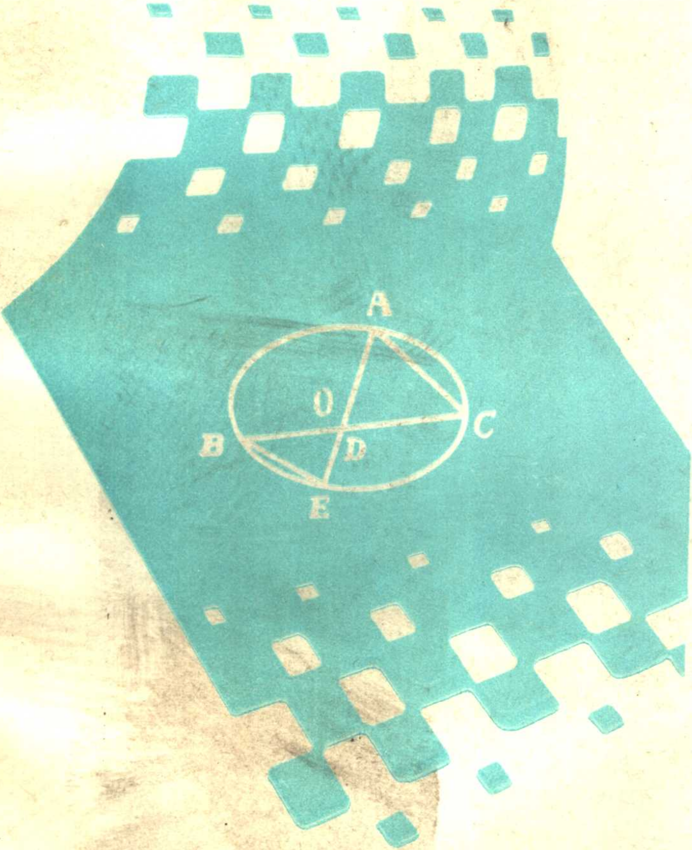
数学竞赛中的杂题

王楣卿　周惠贞　编



山东教育出版社

数学竞赛中的杂题

周惠贞　王桐卿　编

山东教育出版社
1988年·济南

数学竞赛中的杂题

王娟辉　周惠贞　编

*

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　　山东人民印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　6印张　128千字

1989年4月第1版　1989年4月第1次印刷

印数 1—2,140

ISBN 7—5328—0603—8/G·533

定价 1.60元

前　言

数学竞赛的题目中，有些题既不属于代数、几何，又不属于三角，这种“杂题”使人难以入手。但是，仔细分析一下，就可以发现这类杂题中不少属于组合数学（如抽屉原理）、图论、数论的范围。如果学过这些方面的知识，解这类问题就会容易些。本书的目的就是向读者介绍一些有关抽屉原理、数论中的同余论、图论等基本知识，并结合大量的例子（多数选自国内外数学竞赛中的题）来说明如何运用这些知识解“杂题”。为了进一步训练读者的解题能力，书中配备了部分习题。在书的后面附有全部习题的解答与提示。

本书适宜于中学生及中学教师阅读。书中的不足和错误，望读者批评指正。

编　者

1988年8月

目　录

第一章　抽屉原理

1978年第20届国际数学奥林匹克竞赛的题目中有这样的一个题目：

“1978名运动员来自6个国家，用1，2，3，……，1977，1978任意给他们编号，证明：至少有一个运动员，他的号码是他的两个同国运动员的号码之和，或是另一个同国运动员的号码的两倍。”

这个题可以称得上是一个典型的杂题，并且相当难解。不少人花费了大量时间，却无从着手。

有趣的是，解这个题的基础却是一条很简单的原理，就是“我们下面要讲的抽屉原理。

一、抽屉原理

什么叫抽屉原理呢？在回答这个问题前，让我们先来看几个简单的例子。

例1　树上有5个鸟巢，有6只小鸟要飞进这5个巢中，那么不管怎样，必有一个鸟巢里至少要飞进2只小鸟。

例2　把18枝花，插在3个花瓶里，那么不管怎样插法，一定有一个花瓶里至少插进6枝花。

例3　某邮局在门前安放了两个邮筒，现在要把5封信投进这两个邮筒里，那么不管这5封信怎样投法，总有一个邮筒里至少要投进3封信。

在实际生活中，这样的例子很多。如果我们把要投的"信"、要插的"花"、要进巢的"小鸟"统统看作一些"东西"，而把装信的"邮筒"、插花的"花瓶"、小鸟的"鸟巢"统统看作一些"抽屉"，那么，仔细分析一下上面的例子，就会发现它们都遵循着一个简单而又重要的规律：把若干个"东西"放到若干个"抽屉"里，那么必定有一个抽屉至少包含几个或几个以上的东西。

上述例子具有的这种规律，我们把它叫做抽屉原理（又叫鸟巢原理、邮箱原理）。为清楚起见，我们先把这一原理分述为三条规律：

规律1 把$n+1$个东西分放在n只"抽屉"里，那么至少有一只"抽屉"里至少有 2 个东西。

规律2 把m（$\geqslant 1$）个东西，分放在n只"抽屉"里，当n除尽m时，即当

$$m=nq$$

时，那么至少有一个"抽屉"里至少含有q个东西。

这是很明显的，因为如果每个抽屉里所含东西的个数都少于q，那么n个抽屉所含东西的个数就小于nq（$=m$）了。

规律3 把m（$\geqslant 1$）个东西，分放在n只"抽屉"里，当n除不尽m时，即当

$$m=nq+r \quad (0<r<n)$$

时，那么至少有一个"抽屉"里至少含有$q+1$个东西。

这也是很明显的。因为如果每个抽屉所含东西的个数都不超过q，那么n个抽屉所含东西的个数就不会超过nq，这与题设东西总数为$nq+r>nq$相矛盾。

显然，规律 1 是规律 3 的特殊情况。事实上，当$m=n+1$

时，规律 3 就成为规律 1 了。

以上三条规律都称为抽屉原理。抽屉原理本身是很简单的，但是，如能巧妙地灵活运用，可以解决一些较难的题目。

二、例　　子

例4　用红色或者蓝色去涂 5 张卡片，试证明无论如何涂法，都至少有 3 张卡片是被涂上同一种颜色的。

证明：把红、蓝两种颜色当作两只不同的“抽屉”，把涂了红色的卡片看成放在“红抽屉”里，涂了蓝色的卡片看成放在“蓝抽屉”里，根据抽屉原理，至少有 3 张卡片要放在同一只抽屉中。这就证明了，至少有 3 张卡片是同色的。

这个例子比较简单，但是把颜色看成“抽屉”，这对于初学抽屉原理的人，往往是不容易想到的。

下面来看一个比较有趣的问题。

例5　在一个边长为 1 的正方形内任意给定 9 个点。试证：在以这些点为顶点的各个三角形中，必有一个三角形，它的面积不大于$\frac{1}{8}$（1963年北京市中学数学竞赛高三第二试第 2 题）。

在这个题目里，一下子还看不出应该把什么看作抽屉，更不知有几个抽屉，因此，首先要制造“抽屉”。在制造“抽屉”之前，我们先来证明一个引理。

理引1　在一个面积为a的矩形内，任意给定 3 个点，试证：以这 3 个点联线所成三角形的面积不超过$\frac{a}{2}$。

证明：设矩形相邻的两条边的边长分别为s、t，则

$$s\cdot t=a.$$

设矩形内的3个点为x、y、z，通过这3点，分别作平行于底边的直线（图1）。由图1可知

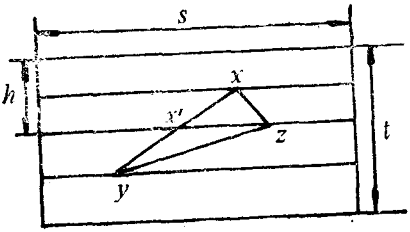


图1

$\triangle xyz$的面积

$=\triangle xx'z$的面积$+\triangle x'yz$的面积

$\leqslant\frac{1}{2}\times s\times h+\frac{1}{2}\times s\times(t-h)$

$=\frac{1}{2}\times s\times t=\frac{a}{2}.$　　　　　　　　　　（证毕）

由引理1可知，为了证明例5，只需证明：存在一个面积为$\frac{1}{4}$的矩形，其中至少包含所给的3个点。

证明：平行于原正方形的底边作三条直线，把正方形分为4个全等的矩形（图2）.把每一个矩形看作一只“抽屉”，这样，我们制造了4只“抽屉”，把9个点分放在4只“抽屉”中，根据抽屉原理，至少有一只“抽屉”里至少有3个点。由引理1，这3个点联线所成的三角形面积不大于$\frac{1}{8}$。

（证毕）.

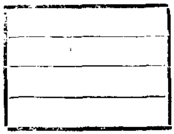


图 2

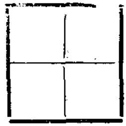


图 3

不难看出，用两条相互垂直的直线把正方形分成四个边长为$\frac{1}{2}$的小正方形也是可以的（见图 3），请读者自己证明.

例6 已知在边长为 1 的等边三角形内有 5 个点，证明至少有两个点距离小于$\frac{1}{2}$（1978年广东省中学生数学竞赛决赛第二试第 5 题）.

证明：本题显然可以采用解例 5 的方法来处理. 把边长为 1 的等边三角形的三条边的中点联结起来，于是，原等边三角形被分为 4 个全等的小等边三角形（图 4）. 把每一个小等边三角形看作一只"抽屉"，5 个点分放在 4 只"抽屉"里，由抽屉原理，

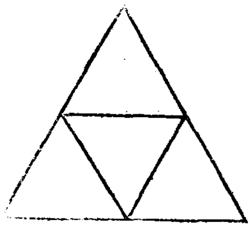


图 4

必有一只"抽屉"里至少有 2 个点. 因为已知的 5 个点是在原等边三角形内的，而小等边三角形的边长等于$\frac{1}{2}$. 不难看出，落在同一只"抽屉"里的两个点的距离小于$\frac{1}{2}$. 这就证

明了给定的5个点中，至少有两个点的距离小于$\frac{1}{2}$。

例7 某次会议有n位代表参加，每一位代表至少认识其余$n-1$位中的一位，则n位代表中，至少有两位认识的人数相等。

证明：因为每一位代表至少认识其余$n-1$位代表中的一位，所以，每一位代表认识的人数或者是1个，或者是2个，……，或者是$n-1$个，我们把“认识的人数”作为“抽屉”，也就是说，制造这样的$n-1$只“抽屉”：

“认识一个人”作为第1只“抽屉”；

“认识二个人”作为第2只“抽屉”；

……

“认识$n-1$个人”作为第$n-1$只“抽屉”。

于是，n位代表，按照他们各自认识的人数，必然分别放到这$n-1$只“抽屉”中。根据抽屉原理，至少有一只“抽屉”里至少有两位代表。这就证明了，n位代表中，至少有两位认识的人数是相等的。

下面应用抽屉原理来解几个有关整点的题目。所谓整点就是具有整数坐标的点。我们知道，若$P_1(x_1、y_1)$、$P_2(x_2、y_2)$是平面上的两个点，那么连接这两点的线段中点M的坐标为

$$X=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

可见，当$P_1(x_1、y_1)$、$P_2(x_2、y_2)$都是整点时，如果x_1与x_2、y_1与y_2分别有相同的奇偶性，则中点M是整点。

同理，若$P_1(x_1、y_1、z_1)$、$P_2(x_2、y_2、z_2)$是空间里的两

个整点，那么，当x_1与x_2、y_1与y_2及z_1与z_2都分别有相同的奇偶性时，连接这两点的线段的中点是整点。

例8 在坐标平面上，任取5个整点，其中一定存在两个整点，它们连线的中点仍是整点。

证法1：设这5个整点是：

$P_1(x_1、y_1)$、$P_2(x_2、y_2)$、$P_3(x_3、y_3)$、$P_4(x_4、y_4)$、$P_5(x_5、y_5)$。先考虑这5个整点的横坐标：x_1、x_2、x_3、x_4、x_5。由抽屉原理，这5个整数中至少有3个整数有相同的奇偶性。不妨假设这3个整数是：x_1、x_2、x_3。

现在再考虑$P_1(x_1、y_1)$、$P_2(x_2、y_2)$、$P_3(x_3、y_3)$这3个整点的纵坐标：y_1、y_2、y_3。对于这3个数，由抽屉原理知，其中至少有两个数有相同的奇偶性。不妨假设是y_1、y_2。这样，我们得到了两个整点$P_1(x_1、y_1)$、$P_2(x_2、y_2)$。其中x_1与x_2、y_1与y_2分别有相同的奇偶性。于是$\frac{x_1+x_2}{2}$和$\frac{y_1+y_2}{2}$都是整数。这就证明了线段P_1P_2的中点是一个整点。

证法2： 用如下的办法来制造抽屉：对于有序整数对$(x、y)$。按照整数的奇偶性，一共可以得到四种不同的类型。（奇、奇），（奇、偶）、（偶、偶）、（偶、奇）。也就是说，我们制造了4只“抽屉”。对于每一个整点，按照坐标的奇偶性，可以放在一只抽屉里，而且仅放在一只抽屉里。现在有5个整点，所以由抽屉原理，至少有两个整点，属于同一只“抽屉”。不妨设为$P_1(x、y_1)$、$P_2(x_2、y_2)$。于是x_1与x_2、y_1与y_2分别有相同的奇偶性，所以线段P_1P_2的中点

是一个整点。

例9 在空间里，任取9个整点，其中一定存在两个整点，它们连线的中点仍是整点。

证明当然可以采用例5中证法1那种方法，但这就需要对三组数（点的横坐标、纵坐标以及竖坐标）连续使用三次抽屉原理。这样显得比较枯燥，所以，我们采用例5中的证法2这种方法来证明。

证明： 设$P(x、y、z)$是空间的任意一个整点。对于有序整数组$(x、y、z)$，当$x、y、z$各自独立地取奇数或偶数时，共有

$$2\times2\times2=2^3$$

种不同的类型（为什么？）。也就是说，有8（$=2^3$）只"抽屉"，现在有9个整点，由抽屉原理可知，至少有两个整点在同一个"抽屉"里，设为

$$P_1(x_1、y_1、z_1)、P_2(x_2、y_2、z_2)。$$

于是，它们的坐标x_1与x_2、y_1与y_2以及z_1与z_2分别有相同的奇偶性。这就证明了线段P_1P_2的中点是一个整点。

例10 证明：由小于100的27个不同的奇数所组成的集合中，必定有一对数，其和为102（澳大利亚1981年第一届数学竞赛试题第一试第1题(a)）。

证明： 小于100的奇数共有50个，即1，3，5，…，49，51，53，…，97，99。这50个奇数中，两数之和为102的，显然只有以下24对：

$$\{3,99\},\ \{5,97\},\ \cdots\cdots,\ \{49,53\},$$

即 $\{2i-1,\ 103-2i\}\ (i=2,\ 3,\ \cdots,\ 25)$。

把数集$A_1=\{1\}$，$A_2=\{3,99\}$，$A_3=\{5,97\}$，

$$\cdots\cdots,\ A_i=\{2i-1,\ 103-2i\},\ \cdots\cdots,$$

$$A_{25}=\{49,\ 53\},\ A_{26}=\{51\}$$

看作26只“抽屉”，把小于100的27个不同的奇数分别放到这26只“抽屉”中，则必有一只“抽屉”至少有2个数。因为同一“抽屉”中的两数之和为102，这就证明了结论。

例11 设自然数n有下面性质：从$1,2,\cdots,n$中任取50个不同的数，这50个数中必有两个数之差等于7。这样的n最大的一个是____（1987年全国初中数学联赛第一试第4题）。

解：因为要证明：“…50个数中必有两数…”，因此需要制造49只“抽屉”，使得抽屉中任两个数的差是7，不难看出，这样的抽屉包含的数不能多于2个。

现在先把数$1,2,\cdots,14$分成7对，就是：$\{1,\ 8\}$，$\{2,\ 9\}$，…，$\{7,\ 14\}$。相似的，把15，16，…28；…；85，86，…，98也各分成7对，每对数的差等于7。把这样得到的每一对数看作一只“抽屉”，共制造了49只“抽屉”：

$\{1,\ 8\}$，$\{2,\ 9\}$，…，$\{7,\ 14\}$，

$\{15,\ 22\}$，$\{16,\ 23\}$，…，$\{21,\ 28\}$，

……

$\{85,\ 92\}$，$\{86,\ 93\}$，…，$\{91,\ 98\}$。

因此，从$1,2,\cdots,98$个自然数中，任意选出50个数，放在这49只“抽屉”中，则必有2个数，落在同一只“抽屉”中，也就是说，当$n=98$时，从$1,2,\cdots,98$中任取50个不同的数，其中必有两数之差等于7。

下面我们证明，$n=98$是具有这样性质的数中最大的一个。事实上，当$n\geqslant99$时可以从$1,2,\cdots,n$中选1，3，5，…，

97，99，这里共有50个数，由于这50个数都是奇数，所以任意两个数的差一定是偶数，不会等于7。

例12 从自然数集$\{1,2,3,\cdots,99,100\}$中，随意选出51个数来，求证：其中一定有两个数，它们中的某一个是另一个的整倍数。

证明：从前面几个题的解法中，我们多次看到，为了证明n个“东西”中至少有两个“东西”符合要求，则需要制造$n-1$只“抽屉”。在这个题目里，我们需要制造50只“抽屉”，不过这里要求每个抽屉中的任意两个数，其中一个是另一个的整数倍。

先考虑自然数1，2，…，100中的50个奇数：

$$1,\ 3,\ 5,\ \cdots,97,\ 99,$$

不难看出，自然数集$\{1,2,\cdots,100\}$中的任何一个数都可以表示成奇数集$\{1,3,5,\cdots,97,99\}$中的某一个奇数与2的方幂的乘积，也就是说，可以把自然数集$\{1,2,\cdots,100\}$分成如下50组：

$A_1=\{1,\ 1\times2,\ 1\times2^2,1\times2^3,1\times2^4,1\times2^5,1\times2^6\}$，

$A_2=\{3,\ 3\times2,\ 3\times2^2,\ 3\times2^3,\ 3\times2^4,\ 3\times2^5\}$，

$A_3=\{5,\ 5\times2,\ 5\times2^2,\ 5\times2^3,\ 5\times2^4\}$，

$A_4=\{7,\ 7\times2,\ 7\times2^2,\ 7\times2^3\}$，

……

$A_{25}=\{49,\ 49\times2\}$，

$A_{26}=\{51\}$，

$A_{27}=\{53\}$，

……

$A_{50}=\{99\}$。

很明显，1，2，…，100中的每一个数属于并且仅属于这50组中的一个组，我们把这样得来的每一组看作一只“抽屉”，把从自然数集｛1，2，…，100｝中任意取出的51个数分放到这50只“抽屉”中，必然至少有两个数落在同一只“抽屉”里，而在同一只“抽屉”中的两数，大数必定是小数的整倍数。

例13 一个正方形被分成了$15\times15=225$个大小相同的小方格（图5），在每一个小方格中，任意填写1，2，3，…，55，56中的一个数。求证：一定能够找到四个小方格，它们的中心构成一个平行四边形的四个顶点，并且这平行四边形各条对角线两端的两个小方格中的数字之和相等。

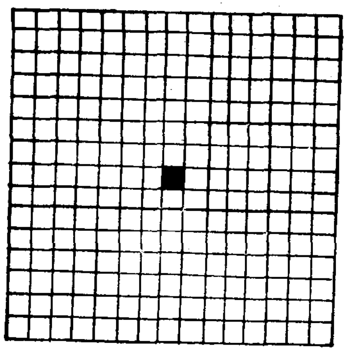


图5

分析：用x表示放在一个小方格中的数。由假设

$$1\leqslant x\leqslant 56.$$

因此，任何一对小方格中的两数之和不外乎

2，3，4，…，110，111，112

共有111种可能。现在，有225个小方格，如果把它们两两配对，则能配成112对（多余一个小方格）.由于112对小方格，其数字之和只有111种可能，因此，必有2对小方格数字之和是相同的。可见，问题的关键是：这225个小方格应如何配对，才能使数字之和相同的这两对小方格，它们的中心恰好是一个平行四边形的顶点。

证明：由于15是一个奇数，所以一定有一个小方格位于大正方形的中心位置，在图5中，用黑色标出，我们把它称为“黑小方格”．把关于“黑小方格”为中心对称的每两个小方格配成一对，这样，便把除去“黑小方格”以外的224个小方格恰好配成了112对，并且，每对小方格的中心联线，假设它们不重合的话，必在“黑小方格”的中心处互相平分。所以，这4个小方格的中心是一个平行四边形的顶点。假如它们重合，则把它看作是一个退化了的平行四边形。

把数2，3，4，…，110，111，112中的每一个数看作一只“抽屉”，并把这111只抽屉分别叫做“数2抽屉”、“数3抽屉”……等等。如果一对小方格数字之和是a,就把这一对小方格放入“数a抽屉”中，于是，如上配对好了的112对小方格，按照它们各对数字之和而分放在111只“数字抽屉”中，则至少有2(对)小方格，它们各对中两数之和为同一数字。按照小方格的配对原则，这4个小方格的中心正好是一个平行四边形的顶点。

例14 (1) 假定一个4×7方格的棋盘，如图6所示，各个方格可以涂上黑色或白色。求证：对任何一种涂色方式，在棋盘中必定包含一个由棋盘上横线和纵线所构成的矩形