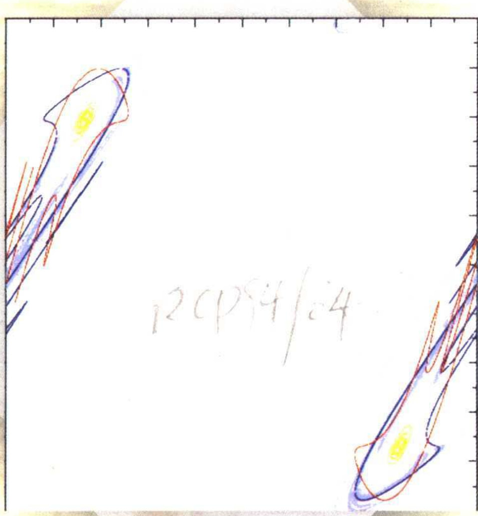
非线性动力学引论

处处光滑与分段光滑系统的动力学特性

何大韧　汪秉宏　汪颖梅　牛建军　编著



非线性动力学引论

——处处光滑与分段光滑系统的动力学特性

何大韧　汪秉宏　汪颖梅　牛建军　编著

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力学引论/何大韧　汪秉宏　汪颖梅　牛建军编著.
-西安:陕西科学技术出版社,2001.5

ISBN 7-5369-3170-0

Ⅰ.非…　Ⅱ.①何…②汪…③汪…④牛…　Ⅲ.非线性力学;动力学　Ⅳ.0322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 29599 号

出 版 者	陕西省科学技术出版社 西安北大街 131 号　　邮编 710003 电话(029)7211894　　传真(029)7218236
发 行 者	陕西科学技术出版 电话(029)7212206　　7260001
印　　刷	西安市建明印务有限责任公司印刷
规　　格	850mm×1168mm　　32 开本
印　　张	7.125 印张
字　　数	179 千字
印　　数	500
版　　次	2001 年 5 月第 1 版 2001 年 5 月第 1 次印刷
定　　价	20.00 元

(如有印刷质量问题,请与承印厂联系调换)

前　言

我们生活在一个复杂多变的世界。自从有人类以来，可能有数不清的智者思考过世间万物的演变由谁支配的问题。在现代科学出现以前，这种思考常常导致有神论。牛顿创立的经典力学的巨大成就至少在科学界树立了这样的信念，即宇宙万物的演变是受可以被认识的确定规律支配的。也许是由于在大学期间难于讲授非线性系统的概念和规律，这种信念在几百年来几乎统治过大多数受过科学教育的人的头脑。然而，除一些简单的力、热、光、电现象之外，大量的复杂系统，例如流体系统、生命系统、社会系统等等，其行为又很难让人相信宇宙中万物的演变规律是完全确定性的。这种哲学上的思辨矛盾在玻耳兹曼等人创立统计物理学后曾演变为科学哲学的深刻论战。学完大学物理学的人一方面深感经典力学、相对论、量子力学阐述的客观规律的深刻和优美的确定性，另一方面如果他善于思考的话，又会为周围种种看来必须引入概率论的方法和工具才能处理的复杂现象而困惑。我们的世界究竟是确定性的，还是随机性的？这个问题许多年来也许只有大师级的人物才在不停地思考，但却深深涉及科学思想的核心。

可能有两种观点。一种观点认为宇宙的基本规律是必然性的，偶然性只是由于我们对所观察现象缺乏足够精确的测量、计算、描述手段所产生的假象。例如，看来是必须使用概率论来处理的掷钱币游戏，如果人们能无限快而且无限精确地测量、计

算、描述钱币和投掷撞击物的形状、质量等固有性质和被掷出瞬间的所有动力学特性，那么投掷的结果应该是可以根据经典力学预言的；另一种观点认为偶然性是根本，确定性规律都是建立在对个别事件的概率性描述基础上的、支配大量多次事件的统计平均规律，正如我们在气体分子运动论中学到的统计平均规律一样；也许还有第三种可能：世界中的事物可以分为两类，一类受必然性支配，一类受偶然性支配。本书的读者可以试着自己回答哪种观点是正确的。根据编者的经验，虽然近年来大量现代科学内容进入了中学和大学教科书，大部分大学刚毕业的学生仍感到这问题很新鲜而且无从答起。

近20几年来受到普遍重视的混沌现象使人感到可能给确定性与随机性的思辨一个统一的阐述。所谓混沌是指由完全确定性规律描述的系统中由于运动对初值无限敏感所表现出的在实际描绘、测量中的随机性。这时任一微小的干扰都会引起结果的巨大差异，从而导致实际上的“不可预言性”。在19世纪70年代末人们惊奇地发现许多由极其简单的确定性方程描述的系统，例如大摆幅有阻尼有驱动的单摆，也可以发生混沌运动，从而产生一个可以通过任何随机性检验的运动变量时间序列。许多人由此想到，这个观点是否可以普遍推广。如果可以，混沌可能就是确定性与随机性的科学统一图像。也就是说，世界上没有绝对的确定性，也没有绝对的随机性，只有在一定条件下暂时占据支配地位的确定性或随机性。20几年来的研究成果也许告诉我们事情并不这样简单。在大量低维系统模型研究中总结出的混沌现象的规律可能还是相对简单的认识。复杂系统的行为可能远远比混沌现象复杂。确定性与随机性的统一图像也许存在，但现在描述它可能还为时尚早。

混沌学发展的意义也许主要不在它本身，而在于引导人们注意强非线性行为，从而推动大家运用它提出的一些新思想来发掘

各个学科中的新概念、新现象、新规律，导致对各种复杂系统的深入研究。混沌学中的新思想也许比混沌学本身的具体结论更为有用。混沌学自身的发展也必须与新兴的复杂系统科学相结合，才可能有更大的建树。

本书在研究处处光滑（即与研究问题有关的函数各阶导数都存在而且连续）系统的基础上较多地讨论了分段光滑系统的特性。分段光滑模型一般描述在长期渐变后发生带有质变性质的突变行为的系统，例如材料的断裂、水滴的滴落、电容的放电、振动物体受到冲击等，也许可以说这类模型才是观察时间足够长时对一般稍复杂一点的系统的合理描述。一直受到重视并且得到仔细研究的处处光滑模型反而只是它们的一段渐变过程的描述，这些分段光滑模型可能展示与处处光滑模型非常不同的动力学行为。对这些特征行为的认识肯定会有助于对量变—质变普遍过程的科学理解。限于篇幅，在本书第8章仅介绍了作者们1992年以来在三期国家自然科学基金、攀登计划、陕西省自然科学基金、江苏省教委自然科学基金以及中国科学院理论物理研究所开放所课题支持下研究分段光滑系统所取得的部分成果，包括我们在世界上首先发现的V型阵发、分段光滑性导致激变、多重魔梯等新现象和新规律。此外，也在各章中少量地介绍了一些其他人关于处处光滑和分段光滑系统混沌动力学行为的研究工作。

20年前，当作者中的两位刚刚介入混沌学研究时，曾苦于找不到一本启蒙的书。如今混沌学的书也许已经有几百本了，但似乎还缺少一本专门为大学物理系毕业学生所写的中文入门书。本书是在我们长期教学实践的基础上形成的，仅以此贡献给这些读者。

在本书写作中，赵金刚、徐秀莲、陈红霞等同学花费了不少时间输入文字和公式。同时，本书的第8章包含我们当年的学生或合作者屈世显、吴顺光、范建平、官山、陈贺胜、李广良、贺

庆丽、马明全，以及在国外的导师或朋友高亦涵、叶维江、W. Martienssen、M. Bauer、S. Habip、U. Krueger、B. Christiansen 的辛勤劳动。在此也向他们表示感谢。

本书的出版得到扬州大学第一届优秀研究生教材出版基金、国家重点基础研究专项（973 项目）经费、国家攀登计划“非线性科学”、国家自然科学基金重点项目（编号 19932020）和一般项目（编号 19975039、19974039、59876039）的资助，特此表示谢意。

作者

2001 年 5 月

目　　录

第 1 章　动力系统、平衡点的稳定性与分岔

1.1　动力系统

动力系统是指其状态参量随时间变化的系统。若用 $x_i(i=1,2,\cdots,s)$表示动力系统的 s 个状态参量，则它们的演化方程可表示为

$$x_i=x_i(t),\qquad i=1,2,\cdots,s \tag{1-1}$$

若用$\vec{x}$ 表示 s 维空间中的一个矢量，它的分量为 $x_i(i=1,2,\cdots,s)$，则状态演化方程为

$$\vec{x}=\vec{x}(t) \tag{1-2}$$

现代文献中常忽略矢量号，写为

$$x=x(t) \tag{1-3}$$

这里讨论的动力系统，通常不考虑系统在空间广延性上的变化，仅讨论随时间的变化，也就是描述系统的方程是常微分方程。

动力系统的时间变化可能有两种形式，第一种形式是时间连续地变化，这样的系统称为连续动力系统。其状态方程为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\dot{x}_i=f(x_i,t,c_j) \tag{1-4}$$

这里 $i=1,2,\cdots,s$；c_j 为参量，$j=1,2,\cdots,k$；x_i(或 $\vec{x}$)为向量函数的集合，称向量场。

对于任意形式的方程

$$\frac{\mathrm{d}^s y}{\mathrm{d}t^s}=g\left(t;y,\dot{y},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{s-1}y}{\mathrm{d}t^{s-1}}\right) \tag{1-5}$$

总可以通过变换

$$\begin{cases} x_k=\dfrac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}t^{k-1}}, & k=1,2,\cdots,s \\ f_l=x_{l+1}, & l=1,2,\cdots,s-1 \\ f_s=g \end{cases} \tag{1-6}$$

使其变成式(1-4)形式。

例 1-1 大幅度单摆的无量纲运动方程是

$$\ddot{x}+\omega_0^2\sin x=0$$

令

$$\begin{cases} x_1=x \\ x_2=\dot{x} \end{cases}$$

方程即可化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-\omega_0^2\sin x_1 \end{cases} \tag{1-7}$$

若式(1-4)的方程中各式不显含 t,则这样的动力系统称自治系统。若式(1-4)的方程中有一式显含 t,则称非自治系统。显然式(1-7)方程所表示的是一个自治系统。在满足一定条件下,可以把非自治系统升高一维,化为自治系统。因此,不失一般性,我们以后总是可以假定所研究的 s 维动力学系统是自治的,即动力学方程(1-4)的右边不显含 t。

例 1-2 在周期力驱动下阻尼摆的方程是

$$\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega_0^2\sin x=A\cos\Omega t \tag{1-8}$$

这是一个二阶的非自治系统方程,可以化为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A\cos x_3 - \beta x_2 - \omega_0^2 \sin x_1 \\ \dot{x}_3 = \Omega\end{cases}$$

第二种时间变化的形式是时间不连续地跳跃变化，这样的系统称为离散动力系统。大家在大学物理课中很少见到离散动力系统模型，可是不难想象，任何测量或数值计算的结果都只能是离散的序列。它们表示的系统演化过程由一个差分方程(或称映象)

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_t), \qquad t \text{ 为整数} \tag{1-9}$$

来描述。

通常大家关心的是给定初值的系统的状态具有怎样的演变规律。若式(1-4)是线性常微分方程组，或式(1-9)中各项函数为线性的，系统称为线性系统。它们原则上可以被解析求解，不可能有复杂行为。近年来的研究已经证明非线性系统中的绝大多数不可能被解析求解。这时可能出现的复杂行为将在本书中讨论。

例 1-3 如式(1-7)所示，一个理想的单摆方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin x_1\end{cases}$$

若单摆是作小振幅运动，则 $\sin x_1 \approx x_1$，所以方程简化为线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1\end{cases} \tag{1-10}$$

例 1-4 我们粗略地推导生态学中著名的虫口模型。用 N 表示虫口数，实际上 N 也只能跳跃变化，而且每年有一个虫口的统计数字已属不易，设第 K 年的虫口数为 N_k。为表示虫口的演化规律，首先构造一个最简单的线性模型

$$N_{k+1} = AN_k \tag{1-11}$$

系数 A 由食物、天敌、环境等因素决定。若 $A>1$，虫口将不断地增加，以致于虫口爆炸；若 $A<1$，虫口将不断地减少，虫口将

灭绝；若 $A=1$，虫口数将不变。显然这样一个简单的线性模型不能很好地反映虫口的演变规律。若 $A>1$，虫口不断地增加时，一定会出现由于食物竞争、天敌危害、疾病传播等因素导致的一个起限制作用的负值附加项。此附加项必须在 N_k 较小时不重要，而在 N_k 较大时很重要，该项与虫口中两两相关。一个平方项应该是符合此要求的最简形式。因而模型成为

$$N_{k+1}=AN_k-BN_k^2 \quad (B \ll A) \tag{1-12}$$

虫口显然不能为负值。将上式右端分解因式，可看出虫口应有一个最大值 $N_{max}=A/B$。若作变换，令 $x_n=N_k/N_{max}$，则得到式(1-12)的归一化形式

$$x_{n+1}=Ax_n(1-x_n) \tag{1-13}$$

上式称为 logistic 映象。

1.2 连续动力系统的平衡点及其稳定性

一、平衡点

定义 1-1 对于连续动力系统方程式(1-4)，若存在一点 $P^E=(x_1^E,x_2^E,\cdots,x_s^E)$，满足

$$f_i(x_1^E,x_2^E,\cdots,x_s^E)=0, \qquad i=1,2,\cdots,s \tag{1-14}$$

则称 P^E 为连续动力系统的平衡点或不动点。

因此，方程式(1-4)在任一平衡点处满足

$$\dot{x}_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\Big|_{x=x^E}=0$$

它意味着对任何变化 $\mathrm{d}t$ 总有 $\mathrm{d}x_i=0$ 成立。因此处在平衡点的系统一定会继续留在这个状态。

例 1-5 求大摆幅、小摆幅单摆方程的一阶不动点。

解：根据单摆的方程(1-7)，有

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 |_{x^E} = 0 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin x_1 |_{x^E} = 0\end{cases}$$

所以,大摆幅单摆的一阶不动点是

$$\begin{cases}x_1^E = k\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ x_2^E = 0\end{cases}$$

对小摆幅单摆有

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 |_{x^E} = 0 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 |_{x^E} = 0\end{cases}$$

它的不动点是

$$\begin{cases}x_1^E = 0 \\ x_2^E = 0\end{cases}$$

二、平衡点的渐近稳定性

定义 1-2 当 $t \to \infty$ 时,若从相空间中任一平衡点 P^E 的邻域 U 内所有初值出发的解都趋于 P^E,则称 P^E 是渐近稳定的。

例 1-6 大摆幅阻尼振荡的方程为

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

方程可化为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta x_2 - \omega_0^2 \sin x_1\end{cases} \tag{1-15}$$

容易求得它的平衡点为

$$\begin{cases}x_1^E = k\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ x_2^E = 0\end{cases}$$

它的相空间轨道见图 1-1,从图中可见所示的平衡点是渐近稳定的。

例 1-7 大摆幅单摆的相空间轨道见图 1-2。请注意此图只是无限长相图中的一部分。任意 2π 长度内图像完全相同。例 1-5

所解出的不动点可分为两类，它们都不是渐近稳定的。

①不动点 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2k\pi \end{cases}$ 称为中心或椭圆点。

②不动点 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=(2k+1)\pi \end{cases}$ 称为双曲点或鞍结点。

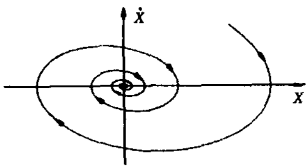


图 1-1 系统式(1-15)的相空间轨道

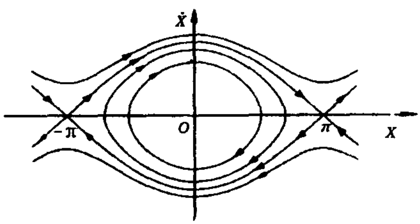


图 1-2 大摆幅单摆的的相空间轨道

三、平衡点的结构稳定性

为了能理解结构稳定性的概念，首先应知道什么是拓扑等价。粗略地说，如果两个函数形式不相同的动力系统，在各自相空间中具有基本性质相似的“轨道群”，而它们之间又可以“连续”地互相变换，则称这两种轨道群为“拓扑轨道等价”。