高中数学教案

本社编

微积分初步

北京师范大学出版社

高中数学教案

微积分初步

本 社 编

北京师范大学出版社

责任编辑：林水平

高中数学教案

微积分初步

本社编

北京师范大学出版社出版发行

全国新华书店经销

国营五二三厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：8.25 字数：171千

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数：1—17 000

ISBN 7-303-00033-x/G·31

统一书号：7243·557 定价：1.80元

前　言

1984年我社编辑出版了《中学数学教材研究与教案选》（共六册），旨在将广大中学数学教师多年来积累的教学经验在全国范围内进行交流和推广。实践证明，这种做法得到全国各地广大中学数学教师的欢迎。它对于开展中学数学教学研究，提高教学质量起到了促进作用。

教育在改革，教学方法也在发展，同时不少中学数学教师使用《中学数学教材研究与教案选》中也给我们提出了很好的意见和建议，这些促使我们进行修订。这次修订改名为《初中数学教案》（包括代数——四册、平面几何一、二册）和《高中数学教案》（包括代数一、二、三册，立体几何、平面解析几何及微积分初步）。这次修订仍然保持原书的优点，同时在以下三方面加以完善和补充，首先，力图使大多数教案在深度和份量方面对大多数学校的教学是切实可行的；其次，在教案中尽可能体现开发学生智力和培养学生的能力；第三，增加教案的数量，每章末配有复习课教案。

本书的特点是：(1) 教案的作者仍然是全国范围内部分有经验的数学教师，其中有不少特级教师。(2) 本书依据国家颁布的中学数学教学大纲的教学体系，结合现行中学数学教材编写。(3)本书的目的在于研究如何通过课堂教学，使学生掌握基础知识，基本技能技巧以及发展学生思维、开发学生智力、培养学生能力。(4)本书每章开头有一篇教材分

析或教学经验方面的文章，概括本章主要内容及其在中学数学中的地位和作用，教学目的和要求，重点和难点，并且提出教学建议和课时安排。(5)教案中一般是由教学目的和要求，教学重点和难点、教学过程(包括新课引入、新课、小结、作业等)组成。多数教案比较详尽，从中可以看到作者课堂教学的全过程；少数教案较略，但言简意明，脉络清楚、重点突出，有的同一教学内容附有两个不同特色的教案。

本册由北京市西城区教研中心李松文组织定稿。

感谢北京师范大学数学系曹才翰先生对本书编辑出版的关心和支持。

对本书有什么意见和要求，希望广大读者来信告诉我们。

编　者

目　录

极限…………………………………………（1）
　教材分析与教学建议……………………（1）
　数列极限的概念（一）…………………（6）
　数列极限的概念（二）…………………（11）
　数列极限的四则运算……………………（15）
　某些不定型数列极限的求法……………（19）
　无穷递缩等比数列………………………（25）
　数列极限的三个问题……………………（31）
　函数的极限（一）………………………（36）
　函数的极限（二）………………………（42）
　函数极限的四则运算法则………………（46）
　函数的连续性……………………………（52）
　初等函数…………………………………（57）
　初等函数的连续性………………………（61）
　复习课……………………………………（65）
导数与微分…………………………………（75）
　教材分析与教学建议……………………（75）
　导数的定义………………………………（78）
　导数的几何意义…………………………（84）
　函数的可导性与连续性的关系…………（90）
　几种常见函数的导数……………………（95）
　函数的和差积商的导数…………………（99）
　复合函数的导数…………………………（107）

反函数的导数　反三角函数的导数……………………………（114）
对数函数的导数……………………………………………（122）
微分的概念和运算…………………………………………（128）
微分在近似计算中的应用…………………………………（136）
导数与微分的复习课………………………………………（141）
导数的应用…………………………………………………（148）
教材分析与教学建议………………………………………（148）
罗尔中值定理………………………………………………（153）
拉格朗日中值定理…………………………………………（159）
罗尔中值定理及拉格朗日中值定理的应用………………（166）
利用导数判断函数的单调性………………………………（170）
利用导数证明恒等式和不等式……………………………（176）
函数的极大值和极小值……………………………………（180）
函数的最大值与最小值……………………………………（185）
二阶导数应用的预备知识…………………………………（190）
利用二阶导数判断函数的极值……………………………（195）
曲线的凸向…………………………………………………（200）
曲线的拐点…………………………………………………（205）
复习课………………………………………………………（210）
不定积分……………………………………………………（216）
教材分析与教学建议………………………………………（216）
原函数………………………………………………………（219）
不定积分的概念……………………………………………（222）
换元积分法…………………………………………………（226）
应用换元积分法求不定积分………………………………（232）
分部积分法…………………………………………………（234）
定积分及其应用……………………………………………（239）
教材分析与教学建议………………………………………（239）

定积分的计算 …………………………………………………… （242）
平面图形的面积 ……………………………………………… （246）
旋转体的体积 ………………………………………………… （250）

极　限

教材分析与教学建议

一、教材分析

极限概念是微积分中最基本最重要的概念，微积分中几乎所有的基本概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限来定义的；用极限的运算法则又可以推出求导数与求积分的方法，因此极限的概念及其运算法则是研究微积分的最重要的工具，是全部微积分的基础，因此掌握好极限概念及其运算法则是十分重要的。

本章教材内容包括三部分，即数列极限的概念和运算法则；函数极限的概念和运算法则；函数的连续性及其有关定理。

教材采用由特殊到一般的方法来介绍数列极限的概念。首先给出两个特殊的数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$和$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$，把这两个数列的前几项分别在数轴上表示出来，通过数轴对数列的无限变化趋势进行定性分析，然后通过列表对数列的无限变化趋势进行定量分析，从而进行直观地来描述数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$和$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$的极限。在此基础上抽象出数列极限的定义（即 ε-N 定义）。然后介绍了数列极限的四则运算法则，结合实例给出了无穷

递缩等比数列(即公比的绝对值小于1的数列)的各项和的定义与计算公式,以及应用此公式将循环小数化为分数的方法。

由于自变量有不同的变化方式，相应地就有不同的类型的极限，函数极限和数列极限的形式虽然有所不同，但它们的思想是完全相同的。教材中对于函数的极限概念分为两种类型，即当 $x\to\infty$ 时函数的极限和当 $x\to x_0$ 时函数的极限。因为函数极限的严格定义（即 ε-δ 定义）学生难于理解，所以采用直观描述的方法来介绍函数极限的定义，这样虽然降低了要求，但不影响对后面知识的学习。

在介绍函数在一点处的极限时，要注意区分函数在一点处的极限，函数在一点处的左极限，右极限的区别和联系，并掌握定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A。$$

函数的连续性是用极限的概念定义的，但是连续和极限是有区别的：极限所讨论的是函数在某一点附近的变化趋势，而不管函数在这一点上是否有意义或取什么值；函数在一点处连续不仅要求在这一点有极限，而且要求极限同这一点的函数值相等，要搞清 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 的含意。

教材对基本初等函数、基本初等函数在其定义区间上是连续函数；复合函数、初等函数以及一切初等函数在它们的定义区间上是连续函数等内容作了简单的介绍，为我们提供了计算初等函数极限的一个十分重要的方法。即如果函数 $f(x)$ 是初等函数，而且点 x_0 是函数定义区间内一点，当求 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，只要求出 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数

值$f(x_0)$就可以了。

两个重要极限，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ 与 } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

它们不仅对研究初等函数的极限时十分重要，而且在研究导数时经常用到。

本章内容牵涉到的基本概念比较多，这些概念是学习微积分的重要基础知识，必须让学生能正确理解和运用。

本章教材的难点主要是数列极限的概念和函数连续的概念。

1. 数列极限的概念，它的难点在于："有限"与"无限"的辩证关系；"常量"与"变量"的关系；"无限增大"与"无限趋近"的关系；对极限定义 ε-N 的语言叙述的含意的正确理解。只有对这几个方面予以突破，才能掌握住数列极限的概念。

2. 函数连续的概念，它的难点在于函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续必须具备三个条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限等于 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值。

要讲清楚为什么必须同时满足上述三个条件，以及它们之间的关系。

二、教学建议

1. 根据上面的分析，数列极限的概念既是重点又是难

点，为了让学生更好地理解和掌握这一概念，在教学过程中应抓住以下几个环节：

（1）在分析数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$和$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$的极限时，要加强直观性，充分利用数轴和表格来进行定性分析和定量分析，把“无限增大”和“无限趋近”给予确切的描述。

（2）剖析数列极限的 ε-N 的定义，将 ε-N 的定义可简述为：

任意给定 $\varepsilon>0$，如果总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立，就说数列$\{a_n\}$的极限是 A。

这个定义可分为四个小段。前后两小段“任意给定 $\varepsilon>0$，……，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立”，表明数列$\{a_n\}$的项与常数 A 任意接近或数列$\{a_n\}$无限趋近于常数 A，ε 具有任意性，$|a_n-A|<\varepsilon$ 表明$\{a_n\}$趋近于 A 的无限性。中间两小段“总存在自然数 N，当 $n>N$ 时”，指数列$\{a_n\}$中存在一项 a_N，在第 N 项 a_N 之后所有项 $(a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots)a_n$ $(n>N)$，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立。

（3）通过例题在加强对数列极限概念的几何解释的同时，进一步强化对 ε-N 定义的叙述，从而加深对极限概念的理解。

（4）指明如果数列有极限，那么它的极限是唯一的。

2. 函数连续性的概念是本章教材的另一个重点和难点，掌握这个概念的关键是：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0).$$

上述等式表明：（1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限和右极限都存在；（2）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限与右极限相等；（3）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限与右极限相等且等于 $f(x_0)$。

讲清了这三点内容，掌握函数连续性的概念就比较容易了。

3．在教学过程中要注意以下几点：

（1）教学中一定要紧扣教材。由于课时少和学生接受能力的限制，有些内容只作简单介绍，不必加深教材内容。在理论上也不要过分要求严格，但必须应用直观图形或具体例子将教材内容解释清楚。

（2）为使学生能正确掌握极限的概念，在讲解过程中应遵循由具体—到抽象—再回到具体的认识过程，逐步加深对此概念的理解和认识，同时还要配备一定数量的利用数列极限的定义求数列极限的例题，通过反复练习加深对此概念的认识和理解。

（3）对初学者来说，由于不能准确运用极限符号，在解题时常犯一些错误，在教学过程中应随时提醒，避免错误，如

$$\lim\frac{n+m}{n}=1;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=0;$$

上面这些错误，主要是概念不清所引起的，不仅要纠正这些错误，还要分析出现这些错误的原因。

本章约需18课时，这里选了主要课时的教案，供参考。

北京六中　孙家钰

数列极限的概念（一）

教学目的

使学生初步理解数列极限概念；并能用极限的“$\varepsilon—N$”定义验证一些简单数列的极限。

教学重点和难点

正确理解极限概念中“无限趋近”的含义和数列极限的“$\varepsilon—N$”的定义。

教学过程

一、引入

1．考虑下面的两个数列：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots \qquad ①$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \cdots,1-\frac{1}{2^n},\ \cdots \qquad ②$$

并把这两个数列中的前若干项在数轴上表示出来，然后观察并指出数列①、②的变化趋势：随着项数n的无限增大，数列①的通项无限趋近于0；数列②的通项无限趋近于1。

2．小结：

（1）数列①与数列②的变化趋势的共同特点是：当项数n无限增大时，通项a_n无限趋近于一个常数A。

（2）给出数列极限的描述性定义：对于无穷数列$\{a_n\}$，如果存在常数A，当项数无限增大时，通项a_n的值无限趋近于常数A，则常数A叫做数列$\{a_n\}$的极限。

3．两点注意：

（1）根据上面的分析，对于有穷数列当然不会发生项数无限增大的问题，因此数列极限指的是无穷数列的极限。

（2）“无限趋近”的含义需要进一步精确化。

二、新课

1．数列极限的描述性定义的进一步精确化：着重分析“无限趋近”的含义。

（1）首先指出“趋近”与“无限趋近”的含义是不同的，例如：数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$趋近于$-\frac{1}{2}$，即随着项数$n$的无限增大，$\frac{1}{n}$与$-\frac{1}{2}$的距离越来越小，但$-\frac{1}{2}$不能是数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限。因为$\left\{\frac{1}{n}\right\}$不是无限趋近于$-\frac{1}{2}$，同样数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$随着项数$n$的无限增大，$1-\frac{1}{2^n}$与$1\frac{1}{100}$的距离也是越来越小，但$1\frac{1}{100}$也不能是数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$的极限，因为数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$不是无限趋近于$1\frac{1}{100}$。（此处需结合图形讲解）。

（2）对于“无限趋近”的定量描述：

看下面两个表：从这两个表中可以看出随着项数的无限

增大，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$中的各项$\frac{1}{n}$与0的差就无限变小；在数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$中1与数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$中的各项$1-\frac{1}{2^n}$的差也无限变小。

项号	项	$\frac{1}{n}-0=\frac{1}{n}$的值
1	1	$1-0=1$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}-0=\frac{1}{5}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}-0=\frac{1}{7}$
…	…	…

表 1

项号	项	$1-\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}$的值
1	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{4}$	$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$
3	$\frac{7}{8}$	$1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$
4	$\frac{15}{16}$	$1-\frac{15}{16}=\frac{1}{16}$
5	$\frac{31}{32}$	$1-\frac{31}{32}=\frac{1}{32}$
6	$\frac{63}{64}$	$1-\frac{63}{64}=\frac{1}{64}$
7	$\frac{127}{128}$	$1-\frac{127}{128}=\frac{1}{128}$
…	…	…

表 2

定量描述：上面的结论还可以这样表达：随着项数n的无限增大，$|a_n-A|$可以任意地变小，即对予先指定的任意小的正数ε，从数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的某项之后的所有项总能使$\left|\frac{1}{n}-0\right|$

$=\frac{1}{n}<\varepsilon$ 恒成立，例如当 $\varepsilon=0.0025$ 时，$\frac{1}{n}<0.0025$，$n>400$。即400项以后各项：a_{401}，a_{402}，a_{403}，…不等式：$|a_{401}-0|<0.0025$，$|a_{402}-0|<0.0025$，$|a_{403}-0|<0.0025$，…

对数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$也有类似的情况；

2．数列极限的"ε-N"定义（见课本）．

3．关于数列极限的"ε-N"定义的两点说明：

（1）ε具有绝对的任意性．

（2）N 是 ε 的函数，是随着 ε 取值的不同而不同，并且 N 的取值不唯一．

4．数列极限的符号与读法．

三、巩固练习

例 已知数列：$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots$

（1）写出这个数列各项与0的差的绝对值．

（2）第几项后面所有项与0的差的绝对值都小于0.1？都小于0.001？都小于0.0003？

（3）第几项后面所有项与0的差的绝对值都小于任何予先指定的正数 ε？

（4）0是不是这个数列的极限？

解：（略）

四、小结

1．数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是递减的，当 n 无限变大时 a_n从0的"右边"无限趋近于0；数列$\left\{1-\frac{1}{2^n}\right\}$是递增的，当 n 无限变大