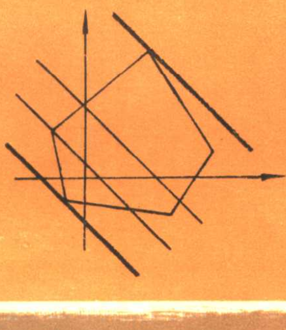
·高中学生数学读物·

课外数学天地



福建教育出版社

课外数学天地

福建教育出版社

内　容　提　要

本书发表24篇中学课外数学讲座的讲稿。内容包括数学的辩证观和唯物史观漫谈；数学方法、解题方法趣引；数学知识窗口以及日常生活中的数学等。题材广泛、新颖，谈论通俗、生动。每篇不过六、七千字，适于中学举办课外数学讲座参考，也可作为中学生课外读物。

课 外 数 学 天 地

本 社 编

出版：福 建 教 育 出 版 社
发行：福 建 省 新 华 书 店
印刷：福建教育出版社印刷厂

787×1092　32开本　9.875印张　202千字

1987年7月第一版　1987年7月第一次印刷

印数：1——4,400

书号：7159·1017　定价：1.55元

目录

1 漫话数学史上的探索与创新

王杰观

十九世纪伟大的数学家高斯（Gauss，1777——1855）说："数学是科学的皇后"，这概括地说明了，数学这门高度抽象、理论严谨、应用广泛的学科，在科学的王国里有它独特的地位，好象皇后在她的国家里有独特的地位一样。

一、数学的起源——数学学科的形成

大家都说，数学是研究空间形式和数量关系的学科，这样说是符合历史事实的。我们的祖先就是从自然界中形形色色的物质和现象里，抽出它们共同的空间形式与数量关系加以研究，才逐步形成一门独立的科学分支——数学。但是事物是在不断的发展变化的，因而数学的研究对象与方法亦随之发展变化。今天更确切地说，数学是以现实世界的现实形式与关系作为自己的对象，主要用严格的演绎推理的方法来研究并建立一套严谨的理论系统的科学。恩格斯说："为了在纯粹形态上来研究这些形式和关系，必须把它们同它们的内容完全割裂开来，把它们的内容抛在一边当作没有什么关系的东西（这就是数学抽象性的特点——笔者注）。但是离开内容的形式和关系是不存在的，数学的形式和关系不能绝

对地同内容无关（实践性和应用的广泛性）．……这就是在数学的本质中的根本矛盾．这种矛盾是认识的普遍矛盾在数学中的特殊表现．”这科学地论述了数学学科的形成及其发展的规律，数学抽象的过程是形式和内容对立统一的过程，它把现实世界的一切新领域中的形式和关系都包括在自己的研究范围之内，从而不断地产生新的内容．从基础知识来说，有逐步加强与深化的过程．而且，数学本身内部成果的积累，必然要引向新的抽象阶段（量变到质变），形成新的研究方向或产生新的数学分支．

数的概念和简单几何图形是数学的最基础的知识．最简单的自然数，产生于数数，用手指头来数猎获物的个数，从而抽象出它们共同的（手指头和猎获物）数量特征1，2，3，…等等；我们的祖先观察望（农历每月十五日，有时是十六日或十七日）夜的月亮和树林中的日影（小孔成象）而产生圆的概念．有人研究某些至今尚未开化的民族对自然数的认识，如凯尼尼族仅能按一只手的指头计算，只能从1数到5；柏拉几尼的某些部族只能按手指关节计算，只知道1，2，3三个数，大于3的数他们都用“许多”来表示．从而我们想到，可能自然数是产生于“多与少”，逐步演变成1，2，3….所以自然数的序数（源于数数）理论和基数（源于多与少）理论都与它的形成有密切的关系．自然数的诞生就带来了序数理论的基本关系（不定义概念）“后继”，即一个接着一个且有第一个自然数1；也带来了作为基数理论的基本关系“断片$|1, n|$”，即含有n个元素集合的基数．并从集合含有任意多个元素，或可无穷无尽地数下去而产生

"无穷"的概念。这些都如同动物由先天带来本能一样地带给了人们。

但是，严格的自然数理论，应归功于19世纪末意大利数学家兼哲学家匹阿罗（G.Peano），他于1891年用公理法定义了自然数，德国数学家康托尔（G.Cantor,1845—1918）集合论的诞生，它成为基数理论的基础。数的概念和集合论是一切数学的基础。

数学从形成独立学科的第一天开始就带来了三大特点：这就是人们所叹服的高度的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性。

古希腊毕达哥达斯（Pythagoras,约公元前580—500）创立了纯数学，他的学派首先认识到用数学方法来研究抽象概念。毕氏认为"世界可以用数（自然数）来解析"。已经知道了两个自然数的比是一个新数（还没有分数的概念）；并且知道不可公度量不是"分数"；能用归谬证法证明了正方形的对角线与边（即$\sqrt{2}$与1）是不可公度的。毕氏学派坚持："一切数学的结果必须依据明白规定的公理用演绎法推出，"这就是抛掉具体事物与现象，用抽象方法来获得数学的理论。这一点是希腊人对数学的最大贡献，可以说毕氏学派是数学抽象化的奠基人。可惜他们没有给后人留下什么著作。

继之，古希腊大数学家欧几里得（Euclid，约公元前330—275）全面总结了前人的成就，发挥了个人的智慧，创造性地写出了《几何原本》这一经典著作。该书是形数结合的开始，表现了数从属于形。他全面接受了毕氏学派和亚里

斯多德*（Aristotle，公元前384—322）公理化思想，开创了从公理出发主要用演绎推理的方法（不是唯一的），来系统地研究空间形式和数量关系的逻辑推理方法，使数学结论的精确性成为无可争辩的事实，并使这些抽象性质深刻化、理论化，同时也就能更广泛地应用于实践。虽然《原本》中有多余的定义，公理系统还不够完备，但这并不影响他作为公理化方法的奠基人的地位。《原本》中已把绝对几何部分与要用平行公设证明的部分截然分开，这是很有预见性的。

阿基米得（Archimedes？公元前287—212）发现《原本》在没有证明任二线段 a 和 b 都存在一个自然数 n，使得 na 长于 b，即 $na>b$ 的情况下，研究线段测量问题。这是理论上的缺陷。但上述结论是难于证明的明显事实，因而提出一条公理：任给二正数 a 和 b，都存在一个自然数 n，使得 $na>b$，即今天大家所公认的阿基米得原理。

仅仅从数学本身的推理和计算而产生的更抽象的数学理论，往往也有极有价值的应用。例如，虚数是从解方程产生的。卡当（Cardan）在《重要的艺术》(1545)的第37章中对“把10分成二数之和，使它们的积等于40”一题作解：即 $x(10-x)=40$，解得 $x=5+\sqrt{-15}$ 或 $x=5-\sqrt{-15}$（$=10-(5+\sqrt{-15})$），而 $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$。卡当大胆地说：“不管会受到多大的良心责备，数学的目标就是这

---

*亚里斯多德首先寻求数学模型指引下的演绎结构，他认为公理是一切科学公有的真理，公设则只是某一门所接受的第一性原理，他的许多公理和定义被欧几里得所接受。

样的神妙地搞下去的，它的目标，正如常言所说，是又精致又不中用的。”他又给出的三次方程$x^3+px+q=0$的求根公式：

$$x_1=A+B,\ x_2=\omega A+\omega^2 B,\ x_3=\omega^2 A+\omega B,$$

其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$， $\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$，

$$\Delta=\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4},\ A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}},\ B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}.$$

应用这公式，求一个有三个不同实根的三次方程的根，遇到了要用负数开平方的问题。如$x^3-19x+30=0$，有三实根$x=2,3,\ -5$。但用卡当公式时

$$A=\sqrt[3]{-15+\sqrt{\frac{-19^3}{27}+15^2}}=\sqrt[3]{-15+\sqrt{\frac{-784}{27}}},$$

$$B=\sqrt[3]{-15-\sqrt{\frac{-784}{27}}},$$

要经过负数开平方，当时的数学家都无法解析这些事实。卡当坚持自己的研究，这是大胆创新的精神。当时虽有许多数学家(如，莱布尼茨（Leibniz）等)形式地在运算中使用了复数，但对它仍持怀疑态度，直到19世纪，复数的几何表示和复变函数论的诞生，复数才在流体力学和空气动力学中找到了广泛的应用。

历史上许多著名的科学家对数学有很高的评价，如亚里斯多德的老师柏拉图（Plato）认为：“只有通过数学才能领会物理世界的实质和精髓。”十七世纪近代科学方法论的奠基人、天文学家、物理学家、当时被称为“发明之父”的迦利略(Galilei，1564—1642)，在表述方法论的定理时讲

到：“数学的抽象方法确实离开了现实，但是说也奇怪，当回到现实时，比把所有因素都考虑进去更为有力”。大哲学家（机械论的创始人）、17世纪生物学的奠基人、第一流的物理学家、坐标几何的创始人之一笛卡儿（Descartes，1596—1650）说：“科学的本质是数学”。他主张：“任何科学分支都应在数学模型上取图案”。伟大的物理学家、数学家牛顿（Newton，1642—1727）说：“要努力把自然现象放在数学的控制之下。”他相信“自然界是用数学设计的”，他还认为数学的结论是绝对真理，比圣经还神圣不可侵犯。这些评价由来于数学推理的严密性和结论的真理性。自然数学的发展也依赖于其他学科所提供的种种问题，他们给数学指出了研究的方向，所以说数学和其他科学是“相依为命”的。我们决不能片面强调数学的作用。而忘了实践是数学发生的源泉，又是数学发展的主要动力之一。

二、数学结构思想在探索与创新中的作用

数学结构思想是抓住某个数学体系的本质特征，即找到该体系的很少而且完备的基本概念（不定义概念）和基本性质（公理），从而定义该体系的新概念并推出该体系的一切结论。用哲学的语言来说即抓住解决问题的主要矛盾。通过解决主要矛盾建立新的数学体系，这样的探索若能成功就是一次大创新。

大创新的先决条件是：了解该问题的历史与现状，从大处着眼小处着手。例如，16、17世纪，当解方程的探讨进入高

峰的时候，卡当的三次方程的根式解法* 的公布，法拉利(Ferrari，1522—1565)用预解三次方程的方法给出四次方程的根式解法，使许多数学家希望利用这一思想来解五次方程、六次方程、……。但它们的预解式都超过四次，这就使人怀疑(1)五次以上方程的根是否存在？(2)若存在能否用根式求解？1799年，高斯的博士论文：给出了代数基本定理的第一种证明，肯定了五次以上方程的根是存在的。在这个基础上，1832年年轻的数学家伽罗华（Galois，1811—1832）设想，既然复数域上代数方程都有解，这个结论应该可以推广于任意域上。他观察在模3剩余类集合GF(3)**上方程

$$x^2-x-1=0 \tag{1}$$

没有解，他假设(1)有一个解 j，把 j 添加于 $GF(3)$，也就是，构造一个以 $GF(3)$ 的元素为系数的 j 的多项式集合 $GF(3,j)$，其中 $j^2-j-1=0$，在 $GF(3,j)$ 里(1)有解。这种思想方法，后人称之为伽罗华思想。由于他过早地死去，所以留下

---

*这里有一段不光彩的史话：据说，卡当的解法是从他达格拉（Tartaglia）那里得来的，并答应他氏不公开这个结论，但是卡当却在一次数学赛会上，公开了三次方程的解法，并载入他的著作《重要的艺术》之中，从而引起一场争吵．事实上，他氏当时给卡当的并非解法，而只是一首语句晦涩的诗，所以历史上都把三次方程根式解的公式，叫做卡当公式．

**GF (3) 包含0，1，2三个元素，定义它们的加、乘运算如下表：

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

在这两个运算下，GF (3) 是一个域（即加法满足交换律、结合律，乘法满足交换律、结合律，加、乘满足分配律且加法、乘法都有逆运算）．

的理论很不完整。后来，法国大数学家柯西（Cauchy，1789—1857）发挥了伽罗华思想，做了大量的研究工作，并把这些成果归功于伽罗华，称之为“伽罗华理论”。应用它可以证明规尺作图能与不能问题（如，三等分任意角，倍立方是规尺作图不能问题的证明等等）也可以解决五次以上方程无根式解等历史上所遗留的问题。这就是看清问题的历史与现状，抓住主要矛盾，大处着眼小处着手地解决矛盾大胆创新的很好的例子。

公理化方法是数学结构思想的主要表现。笛卡儿所主张：“任何科学分支应在数学模型上取图案”，其意义包括下列两个主要步骤：数学从公理出发，通过演绎推理而认识新的真理。据此，任何科学分支，都应从公理或原理出发，然后演绎地进行下，推出尽量多的结果。

提倡科学方法改革中有影响的哲学家贝康（F·Bacon，1561—1626）认为：“寻找和发现真理有两条路，也只有两条路。其一，通过感觉和特例飞跃到普遍的公理，然后通过这些原则及一劳永逸的真理发明和判断一些派生的公理。另一种方法是从感觉和特例收集公理，不断地逐步上升，这样最后到达更普遍的公理；这后一种方法是真实的，但尚未有人试用过”。这些论述确是对公理的来源及其真理性标准作出有说服力的评论。他的所谓“公理”是指通过归纳所得的一般性的命题，它适宜于用作演绎推理的起点。若该公理（或公设）的真理性被怀疑，将影响推理的结果（如，平行公设），改变这个公理将产生新的数学体系（如，非欧几何）。此外，对公理系统的加强与削弱将缩少与扩大研究的

范围，这是数学史上创新的又一条重要途径。

例如，整数集是一个有序环，有理数集、实数集都是有序域*，多数集破坏了有序性，但它还是一个域。还有多项式环、剩余类环等集合，都具备下列被普遍接受的代数公理：

1° $a=b\Longrightarrow a+c=b+c$

2° $(a+b)+c=a+(b+c)$；

3° $a+b=b+a$

4° $a=b,\ c=d\Longrightarrow a+c=b+d$；

5° $a=b,\ c>d\Longrightarrow a+c>b+d$；

6° $a(bc)=(ab)c$；

7° $ab=ba$；

8° $a(b+c)=ab+ac$。

十九世纪中叶，这些公理被认为是永恒性原理的基础。事实上，这些公理不可毫无变化地作为代数的永恒性基础。自然矩阵的乘法已破坏了7°，导入了非交换环。

更大的突破应归功于英国都柏林大学教授汉密顿（W•R•Hamilton，1805—1865），他怀疑复数是否最后一个数

---

*数环（域）指的是在数的某一集合内，可以施行加、减、乘（和除）运算．有序环（域）是在数域P中定义了顺序关系“>”，满足

1° 三一律：任意的a，$b\in$ ，都有且只有下列三种情况之一发生：$a>b$，$b>a$，$a=b$；

2° 加法单调性：$a>b$，任意的$c\in P\Rightarrow a+c>b+c$；

3° 乘法单调性：$a>b$，$c> \Rightarrow ac>bc$时，称P为有序环（域），把“>”看作一般的顺序关系的符号时，往往把$a>b$读作a在b后，$b<a$读作b在a前．

系？复数域作为实数域上的可交换的二维可除代数（“代数”是一个抽象的数学体系，可交换的二维可除代数指的是：在二维线性空间中，还定义有乘法运算且加、乘满足域的条件。若把“可交换”的条件删掉，则可除代数是线性空间且加、乘运算成除环。）有没有维数更高的可除代数呢？在1943年的一天旁晚，他与妻子散步于都柏林大学附近的一条桥上，突然抛开妻子跑回家去，妻子喊他，他也不回头，使他妻子大惊失色，不知出了什么事故！事实上，他当时发现了一种称为“四元数”的数（后人把这条桥改名为“四元桥”用以纪念汉密顿的不朽的成就）。它是比复数更广泛的一种新数，除乘法交换律被破坏之外，其他复数所具备的性质它都具备，对于乘法来说，自然就应分成左乘和右乘了。这是一个善于探索敢于创新的好例子，他不受“永恒性基础”的束缚，敢于和形而上学的观念作斗争。

上述的例子有力地说明了，事物都是在不断地发展变化的，思想的解放促进了数学发展。

三、练习性的探索与创新

积累丰富的知识，掌握前人所创造的解决问题的种种方法，并了解前人的成就和遗留问题的现状，是探索问题的基础，是创新的先决条件。如果现在还有人在搞用规尺来三等分任意角的事，那就是浪费时间，他不知道这是历史上已经被证明了的规尺作图不能问题。有人不了解哥德巴赫(Goldbach)猜想的历史与现状，前人取得成果的方法，而想用初等方法来解决这个问题，这必然是途劳无功的。

创新有创造性和创始性之分，创始性的意义重大自不必说，对于中学生或科技工作者的创造性劳动亦应受到鼓励与支持。

中学生练习性的探索与创新，可以仍以下三方面着手：

(1) 对课本与参考书的内容的系统性与科学性，允许大胆怀疑提出自己的见解，写出自己的读后感，或者更小的范围对一个定理证法的改进等都是探索问题的初步尝试。

(2) 对某些练习题的改造与推广。例如，有十人抬五条长短一样的竹杆，要求每人抬二杆，每杆四人抬，问要怎样抬法。

其抬法是如图的五角星。这个问题的本质是一个正 $n(n\geqslant5)$ 边形，由每一顶点出发与其左、右隔一邻点的顶点相联的 n 条对角线所成的星形，就是抬法的示意图。因此可把这个问题推广为：$2n(n\geqslant5)$ 个人抬 n 条杆，要求每人抬两杆，每杆四人抬，问要怎样抬法？

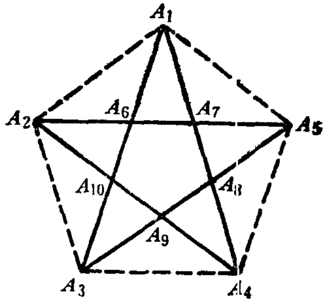


图1—1

又如，把3，41写成两个正整数的平方差。

解：$3=2^2-1$，

$$41=a^2-b^2=(a-b)(a+b)\Longrightarrow a-b=1,$$

$$a+b=41\Longrightarrow a=21,\ b=20\Longrightarrow 41=21^2-20^2.$$

由于3和41都是奇素数，所以这种分解法还是唯一的。于是可容易地推广到一般命题：任一正奇素数，都可以表成二正整数的平方差，且其表示法是唯一的。这样从特殊到一

般的例子是很多的。

(3) 从客观现象中抽出数学的内容作编写数学命题的练习。

例如，1981年25省、市、自治区数学竞赛的最后一题（打台球的问题），读者可参阅该试卷或《福建中学数学》八一年第六期，文中有介绍编题过程的思考方法，这是笔者观察电视中打台球的情况而编造出来。