高中数学强化训练

第一册

刘景波　邵光砚　主编

中国少年儿童出版社

封面设计：李 荣 山
责任编辑：陈 效 师

高中数学强化训练

（第一册）

刘景波　邵光砚 主编

*

中国少年儿童出版社出版　发行
中国青年出版社印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/32　10.75印张　2插页　230千字
1989年12月北京第1版　1989年12月北京第1次印刷
印数1—10,000册　定价3.35元

前　言

为了帮助同学们学好高中数学课，北大附中、人大附中、清华附中、一〇一中学、八一中学五所学校联合组织了数学提高班。在这基础上，老师们把讲稿进行了整理和加工，编写了这套《高中数学强化训练》，目的是使同学们能把高中数学的每一章内容学深、学透、学活，把课堂上所学的知识深化提高。

在内容安排上，本套书注意到与教科书同步，把代数、三角与几何的内容有机地相联系在一起，每一章与它前面所学的知识紧密相连，为了照顾高中三个年级的不同需要，基本上不涉及它后面的内容。因此，本套书既可以配合各年级学生复习每一章内容用，又可作为高三总复习用。

本套书共分为三册，高中三个年级，每一年级一册。其中，每一章都包括四个部分：

第一部分，本章内容提要。

第二部分，例题。这些例题力求构思新颖，有一定的难度，方法灵活，设计巧妙，有代表性，起到既教知识，又给方法的目的。其中，还有为数不少的题是一题多解的，以便启迪学生的思维。另外，这一部分对较难的题，题前有分析；对于典型的题，题后有说明。这样做的目的在于达到举一反三，触类旁通的效果。

第三部分，习题。按题型可分三类：一类是选择题，填空题；一类是基础训练题；还有一类是综合题。学生在做完

这些题之后，能达到掌握本章所讲内容的每一个知识点及涉及到的重要数学方法。

第四部分，自测题。

本书第一册是由人大附中刘景波、鲁纯诚，清华附中邵光砚、瞿宁远、徐重远编写；第二册是由北大附中邓均、蒋大凤，一〇一中学胡大同，八一中学李鸿元、张珍、郑念冰编写；第三册是由北大附中陈剑刚、孙曾彪、董世奎、周沛耕、邓均、张思明，人大附中刘景波，清华附中邵光砚，海淀区教师进修学校赵大悌编写。

目　　录

第一章　集合、幂、指、对函数

一　内容提要

（一）集合与映射

1．集合的概念。

把具有某种属性的一些对象的全体，看成一个整体，便形成一个集合。其中每个“对象”叫做集合的一个元素。

（1）**集合的性质**：确定性，互异性，无顺序性。确定性是指元素属于或者不属于集合的性质。互异性是指集合中的元素必须互不相同，不可重复。无顺序性是指元素排列方法可任意。集合的表示方法有列举法及描述法两种。

（2）**集合的符号**：

“$\in$”——属于符号，用于集合与元素之间。

“$\subseteq$、$\subset$”——包含符号，用于集合与集合之间。

ϕ——空集符号，表示集合没有元素。

N自然数集，Z（J）整数集，Q有理数集，R实数集，C复数集，I全集。

（3）**子集、交集、并集、补集**：

对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫集合B的子集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。由此看出任何一个非空集合至少有两个子集，一个是自身，一个是空集，即$A\subseteq A$，$\phi\subseteq A$。

若A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，则称

A是B的真子集，记作$A\subset B$。注意，空集不是自己的真子集。

若集合A、B的元素完全相同，则说A与B相等，记作$A=B$。

若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$则有$A\subseteq C$。同样，若$A\subset B$，$B\subset C$则有$A\subset C$。这叫集合之间的传递性。

交、并、补集列表如下：

名　称	符号	定　　义	性　　质
A、B的交集	$A\cap B$	$\{x \mid x\in A$且$x\in B\}$	$A\cap B=B\cap A$， $A\cap B\begin{matrix}\subseteq A\\ \subseteq B\end{matrix}$， $A\cap\phi=\phi$。
A、B的并集	$A\cup B$	$\{x \mid x\in A$或$x\in B\}$	$A\cup B=B\cup A$， $A\cup B\begin{matrix}\supseteq A\\ \supseteq B\end{matrix}$， $A\cup\phi=A$。
A的补集	$\overline{A}$	$\{x \mid x\in I$且$x\notin A\}$	$A\cap\overline{A}=\phi$ $A\cup\overline{A}=I$， $\overline{\overline{A}}=A$。

（4）集合运算满足的定律：

（i）交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$。

（ii）结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

（iii）分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

(iv) **反演律**：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

2. 映射、一一映射、逆映射。

设A、B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括A、B及f）叫做从集合A到集合B的映射，记作f：$A\to B$，也叫单值对应。其中，A中元素a对应的B中元素b叫a的象，a叫b的原象。可以看出，映射包含两种对应：一种是一对一，一种是多对一。其实，也不要求B中每个元素都有原象。

若f：$A\to B$是从集合A到集合B的映射，如果在这个映射的作用下，（1）对于A中的不同元素，在B中有不同的象；（2）B中每一元素都有原象，那么这个映射就叫做A到B上的一一映射。不难看出，（1）保证对应是一对一，（2）去掉了B中元素无原象的情况与（1）合起来确保一对一。但是应当注意，一一映射不是一一对应，一一映射是单向，一一对应是双向。

若f：$A\to B$是集合A到B上的一一映射，如果对于B中的每一个元素b，使b在A中的原象a和它对应，这样的映射叫映射f：$A\to B$的逆映射，记作f^{-1}：$B\to A$。应该记住，只有在一一映射的条件下才可以有其逆映射，且是互为逆映射。

（二）函数

1. 映射 f：$A\to B$，当集合A、B都是非空数集合，且B的每个元素都有原象时，映射f：$A\to B$就是定义域A到值域B上的函数。

2. 函数是由定义域、值域及对应法则f三部分组成，其中定义域、对应法则决定了值域。这三部分称为函数三

要素。

3．函数的性质：单调性、奇偶性、周期性、极值、最值、图象均是很重要的函数特征。

4．反函数：如果确定函数$y=f(x)$的映射f：$A\to B$是$f(x)$的定义域A到值域B上的一一映射，那么这个映射的逆映射f^{-1}：$B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫函数$y=f(x)$的反函数。

5．函数方程：当已知复合函数去求原函数时，常常需要解含有未知函数的等式，这样的方程叫函数方程。

（三）幂、指、对函数

1．幂函数。

函数$y=x^n$（n是有理常数，x为自变量）叫幂函数，其定义域要因题而异，其值域由定义域而定：

（1）n是正整数时，$x\in R$。

（2）n是负整数时，$x\neq 0$且$x\in R$。

（3）n是正分数时，令$n=\dfrac{q}{p}$（p、$q\in N$且p、q互质）：（i）p为奇数时，$x\in R$；（ii）p为偶数时，$x\geqslant 0$且$x\in R$。

（4）n是负分数时，令$n=-\dfrac{q}{p}$（p、$q\in N$且p、q互质）：（i）p为奇数时，$x\neq 0$且$x\in R$；（ii）p为偶数时，$x>0$且$x\in R$。

（5）$n=0$时$x\neq 0$且$x\in R$。

不管n如何取值，它们均在第一象限内都有定义，所以在第一象限内研究幂函数的性质有普遍意义。这时，当$n>0$时，x^n是增函数，过（1，1）点及（0，0）点；当$n<0$时x^n是减

函数过（1，1）点。

凡$y=x^{2n}$（$n\in N$），均为偶函数。

凡$y=x^{2n-1}$（$n\in N$），均为奇函数，函数奇偶性也因题而异。

幂函数$y=x^n$的图象如下：

（1）$n\in N$时，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$的图象如图1-1。

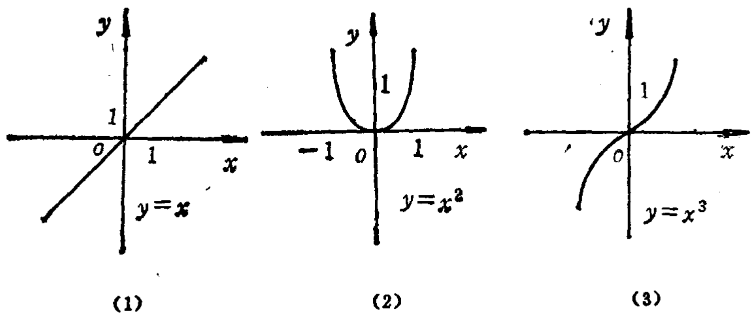


图　1-1

（2）n为正分数时，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，$y=x^{\frac{2}{3}}$的图象如图1-2。

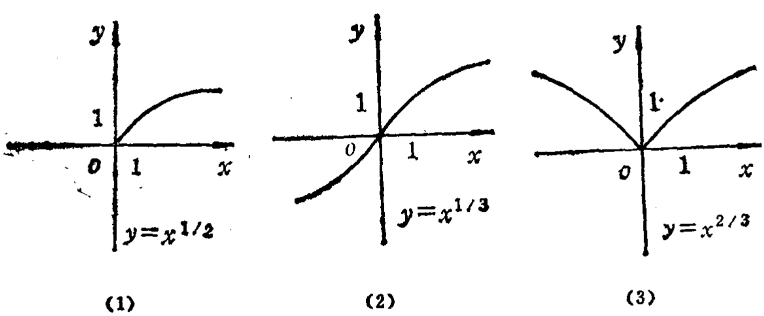


图　1-2

（3）n为负整数零时，$y=x^{-1}$，$y=x^{-2}$，$y=x^{0}$图象如图1-3。

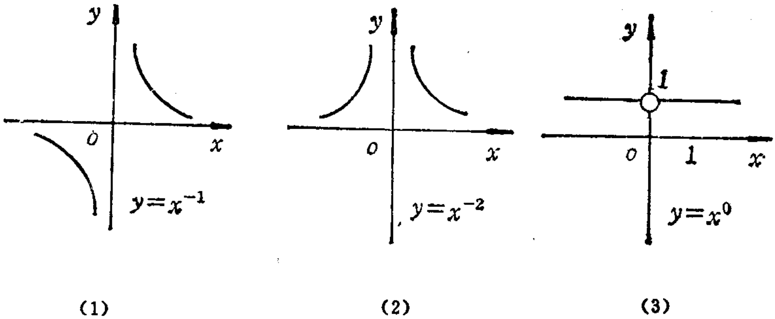


图 1-3

（4）n为负 分 数 时，$y=x^{-\frac{1}{2}}$，$y=x^{-\frac{1}{3}}$，$y=x^{-\frac{2}{3}}$ 如图1-4。

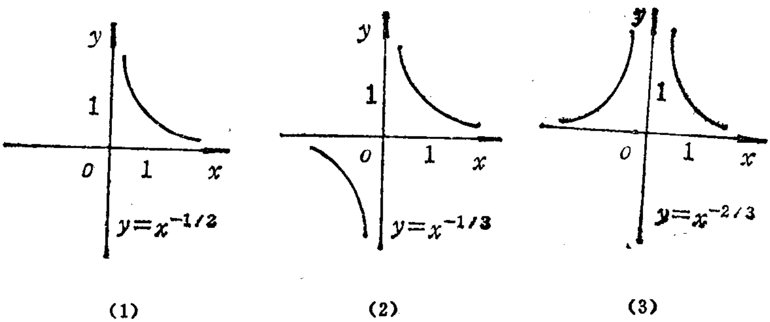


图 1-4

记住这些图象对使用幂函数性质很有帮助。

幂函数$y=x^n$的图象特征：

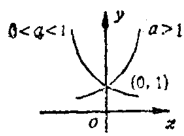
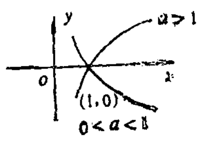
（1）n为偶数，图象关于y轴对称。当$n>0$的偶数，图象过原点且在第一象限递增；当$n<0$的偶数时，图象不过原点且在第一象限内递减。

（2）n为奇数，图象关于原点对称。当$n>0$的奇数，图象过原点且在第一象限递增；当$n<0$的奇数时，图象不过原点且在第一象限内递减。

2. 指数函数和对数函数。

$y=a^x$（$a>0$且$a\neq1$）叫做指数函数。

$y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq1$）叫做对数函数。它是指数函数的反函数。它们的图象关于直线$y=x$对称。

函　数	定义域值域	单调性	奇偶性	图　象	特征点
$y=a^x$（$a>0$且$a\neq1$）	$x\in R$ $y>0$	$a>1$ 递增 $0<a<1$ 递减	非奇非偶函数		图象过(0,1)(1,a)点
$y=\log_a x$ $a>0$且$a\neq1$	$x>0$ $y\in R$	$a>1$ 递增 $0<a<1$ 递减	非奇非偶函数		图象过(1,0)(a,1)点

对数恒等式：$a^{\log_a N}=N$。

对数换底公式：

$$（1）\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\Rightarrow \log_a b=\frac{1}{\log_b a};$$

（2）$\log_{a^n} b^n = \log_a b$;

（3）$\log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{b} = \log_a b$;

（4）$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \log_{a_3} a_4 \cdots\cdots \log_{a_{n-1}} a_n$
$= \log_{a_1} a_n$。

二　范例精选(一)

(一) 集合与映射

例 1　证明$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$。

证明：$\overline{A\cup B} = \{x\mid x\in I,\ x\notin A\cup B\} = \{x\mid x\in I,\ x\notin A,\ x\notin B\} = \{x\mid x\in\overline{A}且x\in\overline{B}\} = \overline{A}\cap\overline{B}$。同学自己证 第二个式子。建议从并集一方往交集一方去证，这样比较简便。

例 2　设$A=\{0,\ 1\}$，$B=\{x\mid x\subseteq A\}$。试问A与B的关系。

解：$\because A$的子集有$\{0\}$，$\{1\}$，$\{0,\ 1\}$，ϕ，$\therefore$得到$B=\{\{0\},\ \{1\},\ \{0,\ 1\},\phi\}$，$\therefore A$是$B$的元素，$\therefore A\in B$。

例 3　$I=\left\{x\mid x=\dfrac{1}{2^n},\ n\in N\right\}$，

$A=\left\{x\mid x=\dfrac{1}{2^{2n}},n\in N\right\}$，求$\overline{A}$。

解：　$\overline{A}=\left\{x\mid x=\dfrac{1}{2^{2n-1}},\ n\in N\right\}$。

例 4　用适当的式子表示图中的阴影部分。

解：（1）$(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$，或

（2）$\overline{A\cap B}\cap(A\cup B)$，或

（3）$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B)$，或

（4）$\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)}$，或

（5）$(\overline{A\cap B}\cap A)\cup(\overline{A\cap B}\cap B)$，等等。

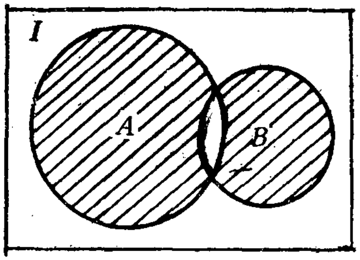


图 1-5

例 5 方程$x^2-ax+b=0$的两根是α、β，方程$x^2-bx+c=0$的两根是γ、δ，又α、β、γ、δ互不相等。设集合$M=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\}$。作集合

$$S=\{x|\ x=\overset{\gamma+\varphi}{u+v},\ u、v\in M 且 u\neq v\},$$

$$P=\{x|\ x=\overset{\alpha\cdot\beta}{uv},\ u、v\in M 且 u\neq v\}。$$

若$S=\{5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$，$P=\{6,\ 10,\ 14,\ 15,\ 21,\ 35\}$，求$a$，$b$，$c$的值。

解：$\because b=\alpha\cdot\beta=\gamma+\delta$，$\therefore b\in S$，$b\in P$，$\therefore b\in P\cap S=\{10\}$，$\therefore b=10$，$S=\{\alpha+\beta,\ \alpha+\gamma,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma,\ \beta+\delta,\ \gamma+\delta\}$。又$S$中各元素之和是$3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=5+7+8+9+10+12=51$，$\therefore \alpha+\beta+b=17$，且$\alpha+\beta=a$，$\therefore a=17-b=17-10=7$，即$a=7$。

又$P=\{\alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \alpha\delta,\ \beta\gamma,\ \beta\delta,\ \gamma\delta\}$它们各元素之和$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\alpha\beta+(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\gamma\delta=b+a\cdot b+c=6+10+14+15+21+35=101$，把$a=7$，$b=10$代入得

$C=101-70-10=21$，$\therefore a=7$，$b=10$，$c=21$。

例 6 在1-1000的整数中，（1）有多少个数是9和15的倍数而不是13的倍数；（2）有多少个数是13的倍数而不是9和11的倍数。

解：设在1-1000中 7 、9 、11、13、15的倍数的集合分别是A、B、C、D、E。

（1）在1-1000中，是 9 和15 的倍数的集合是 $B\cap E$。它是45倍数的集合。$B\cap D\cap E$ 是在 1-1000中，45×13 的倍数的集合。用$n(A)$ 代表集合A中元素的个数。∴满足（1）的是$n(B\cap E)-n(B\cap D\cap E)=\left[\frac{1000}{45}\right]-\left[\frac{1000}{45\times 13}\right]=22-1=21$。其中，$\left[\frac{1000}{45}\right]$表示整数，∴满足（1）的整数有21个。（2）同理，$n(D)=\left[\frac{1000}{13}\right]=76$，

$n(D\cap A)=\left[\frac{1000}{7\times 13}\right]=10$，$n(D\cap C)=\left[\frac{1000}{11\times 13}\right]=6$，$n(A\cap C\cap D)=\left[\frac{1000}{1001}\right]=0$，∴$n(D)-n(D\cap A)-n(D\cap C)+n(A\cap C\cap D)=76-10-6+0=60$。∴满足（2）的整数有60个。

例 7 当元素是自然数，集合S满足：若"$x\in S$"，则"$8-x\in S$"时，回答以下问题：（1）写出只有一个元素的S；（2）写出只有两个元素的S的全部；（3）写出所有满足上述条件的S，并写出一共有多少个。

解：∵x，$8-x$都是自然数，∴$8-x\geqslant 1$，$x\geqslant 1$，$x\leqslant 7$。又$x\geqslant 1$，∴$1\leqslant x\leqslant 7$且$x\in N$。S的元素只可能是：1，2，3，4，5，6，7。

（1）∵S只有一个元素，∴$8-x=x$，∴$x=4$，∴$S=\{4\}$。

（2）∵S只有两个元素，∴当$x=1$时，$8-x=7$，∴$S_1=\{1, 7\}$；当$x=2$时，$8-x=6$，$S_2=\{2, 6\}$；当$x=3$时，

$8-x=5$，$S_3=\{3, 5\}$。

（3）同理，求出含有三个元素的S有$\{1, 4, 7\}$，$\{2, 4, 6\}$，$\{3, 4, 5\}$；含有四个元素的S有$\{1, 2, 6, 7\}$，$\{1, 3, 5, 7\}$，$\{2, 3, 5, 6\}$；含有五个元素的S有$\{1, 2, 4, 6, 7\}$，$\{1, 3, 4, 5, 7\}$，$\{2, 3, 4, 5, 6\}$；含有六个元素的S有$\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$；含有七个元素的S有$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$。

总共有S 15个。

例 8 指出下列哪些对应是映射？一一映射？为什么？

（1）$X\in R$，$Y=\{y| -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}, y\in R\}$，$f$：$x\rightarrow y=\text{arctg}x$。

（2）$X=\{x| x\geqslant 2, x\in N\}$，$Y=\{y| y\geqslant 0, y\in Z\}$，$f$：$x\rightarrow y=x^2-2x+2$。

（3）$X=\{\text{矩形}\}$，$Y=\{y| y>0, y\in R\}$，f：$x\rightarrow y=x$的面积。

（4）$X=\{x| 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$y=\{y| 0\leqslant y\leqslant 1\}$，$f$：$x\rightarrow y=(x-2)^2$。

解：（1）由反正切函数定义可知该对应是映射，也是一一映射。

（2）对于每个$x\geqslant 2$的自然数，$y=(x-1)^2+1\in Y$，故是映射。但是Y中元素0，1在X中均无原象，∴不是一一映射。

（3）∵每个矩形均对应一个确定的面积值，∴该对应是映射。又∵Y中每一个数值可以对应X中几个矩形的面积值，∴不是一一映射。

（4）∵$0\leqslant x\leqslant 2$，∴当$x=0$时，由f：$y=(0-2)^2=4$，