

浙江省教育厅高教处组编

GAODENG SHUXUE JIAOCHENG

高等数学教程

吴迪光 张彬 陈仲慈 李永琪 编著

GAODENG
SHUXUE
JIAOCHENG

浙江大学出版社

浙江省教育厅高教处组编

高等数学教程

吴迪光 张 彬 编著
陈仲慈 李永琪

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程/吴迪光等编著. —杭州:浙江大学出版社, 2000. 8

ISBN 7-308-02379-6

I. 高... II. 吴... III. 高等数学-高等学校-教材
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 30066 号

出版发行 浙江大学出版社

(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

责任编辑 田 华

排 版 浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷 浙江印刷集团公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 25.25

字 数 614 千字

版 印 次 2000 年 8 月第 1 版 2000 年 8 月第 1 次印刷

印 数 0001—5000

书 号 ISBN 7-308-02379-6/O·248

定 价 34.00 元

编写说明

本书根据教育部有关高等学校高等数学课程的教学基本要求,由浙江省教育厅高教处组织编写. 本书主要内容有:函数、极限、连续,一元函数微积分,常微分方程,向量代数与空间解析几何,多元函数微积分,无穷级数(包括傅里叶级数);还包括有关经济数学的内容.

本书每章附有复习思考题、习题、自测题,书末附有各章习题答案,以及二阶与三阶行列式、积分表等内容.

本书另配有《高等数学学习指导》,每章内容按“基本要求与内容思路”、“疑难点问答”、“解题方法选介”、“参考习题”四部分给出,以期达到课堂教学、自学实践、释疑解惑三者有机结合.

本书在编写中,力求内容精练,表述确切,思路清楚,便于教学. 内容阐述方面,注意定义、定理的实际背景、条件、应用范围和分析问题的方法,以及基本运算能力的培养;注意充实几何、物理、经济等领域的实际问题,通过实例既阐明数学观点,又使高等数学与其他有关学科相联系,增强应用数学方法的意识和解决问题的思维方法的训练,为后继课程的学习和创造力的发挥打好基础.

本书可供高等院校非数学专业学生作教材,也可供成人高校作教材及自学考试用书. 书中*部分可供不同层次、不同专业选用,经济管理类教学内容的安排见本书附录三的参考说明.

本书如有不当与差错之处,敬希广大读者批评指正.

吴迪光 张 彬 陈仲慈 李永琪

2000年3月于浙江大学求是园

目 录

第一章 函数	(1)
第一节 函数概念	(1)
1.1 函数的定义 1.2 函数的图形	
第二节 几类有某种特性的函数	(4)
2.1 单调函数 2.2 有界函数 2.3 偶函数与奇函数 2.4 周期函数	
第三节 反函数	(5)
3.1 反函数的定义 3.2 反函数存在的条件 3.3 反函数的性质与图形	
第四节 基本初等函数	(7)
4.1 常值函数 4.2 幂函数 4.3 指数函数 4.4 对数函数	
4.5 三角函数 4.6 反三角函数	
第五节 复合函数	(10)
第六节 初等函数	(11)
6.1 初等函数 6.2 双曲函数 6.3 函数图形的合成法	
6.4 建立函数关系简例	
复习思考题 1	(14)
习题 1	(14)
自测题 1	(16)
第二章 极限与连续	(18)
第一节 数列的极限	(18)
1.1 数列 1.2 数列极限的定义 1.3 数列极限的几何解释	
第二节 函数的极限	(21)
2.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限 2.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	
2.3 函数极限的性质	
第三节 无穷小与无穷大	(26)
3.1 无穷小 3.2 无穷大 3.3 无穷大与无穷小的关系	
第四节 极限的运算	(29)
第五节 两个重要的极限	(32)
5.1 判定极限存在的准则 5.2 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的证明	
5.3 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的证明	
第六节 函数的连续性	(36)
6.1 函数连续的定义 6.2 函数的间断点 6.3 初等函数的连续性	
第七节 无穷小的比较	(40)

7.1 无穷小的阶	7.2 等价无穷小的替代法则	
第八节 闭区间上连续函数的性质		(42)
复习思考题 2		(43)
习题 2		(44)
自测题 2		(47)
第三章 导数与微分		(49)
第一节 导数概念		(49)
1.1 导数的定义	1.2 左导数与右导数	1.3 可导与连续的关系
第二节 导数的运算		(52)
2.1 几个基本初等函数的导数	2.2 导数的四则运算	2.3 反函数的求导法则
2.4 复合函数的求导法则	2.5 基本导数公式表	
第三节 高阶导数		(61)
第四节 微分		(63)
4.1 微分概念	4.2 微分的运算法则和基本公式	4.3 微分的几何意义
4.4 微分在近似计算中的应用		
第五节 隐函数与参数式函数的求导法则及相关变率问题		(66)
5.1 隐函数求导法则	5.2 参数式函数的求导法则	5.3 相关变率问题
复习思考题 3		(71)
习题 3		(72)
自测题 3		(75)
第四章 微分中值定理		(77)
第一节 罗尔定理		(77)
第二节 拉格朗日定理		(78)
第三节 柯西定理		(80)
第四节 洛比达法则		(81)
4.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式	4.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	4.3 其他未定式
第五节 泰勒定理		(86)
5.1 泰勒定理	5.2 泰勒定理的应用	
复习思考题 4		(90)
习题 4		(90)
自测题 4		(92)
第五章 导数的应用		(94)
第一节 函数的单调性与极值		(94)
1.1 函数单调性的判定法	1.2 函数的极值	
第二节 函数的最大值与最小值		(98)
第三节 曲线的凹向与函数图形的描绘		(100)
3.1 曲线的凹向与拐点	3.2 函数图形的描绘	
* 第四节 曲线的曲率		(103)
4.1 曲率的概念	4.2 曲率的计算公式	4.3 曲率圆

第五节 求方程近似根的切线法	(107)
* 第六节 变化率在经济学中的应用	(109)
6.1 边际函数 6.2 利润最大化原则 6.3 需求函数、供给函数与均衡价格	
6.4 弹性函数	
复习思考题 5	(115)
习题 5	(116)
自测题 5	(118)
第六章 不定积分	(120)
第一节 不定积分概念与基本积分公式	(120)
1.1 原函数与不定积分概念 1.2 基本积分公式表 1.3 不定积分的性质	
第二节 基本积分法	(124)
2.1 凑微分法(第一变量替代法) 2.2 变量替代法 2.3 分部积分法	
第三节 有理函数与三角函数有理式的积分	(134)
3.1 有理函数 3.2 有理函数的积分 3.3 三角函数有理式的积分	
* 第四节 积分表的使用法	(140)
复习思考题 6	(141)
习题 6	(142)
自测题 6	(145)
第七章 定积分及其应用	(147)
第一节 定积分概念	(147)
1.1 实例 1.2 定积分的定义 1.3 可积条件	
第二节 定积分的性质	(151)
第三节 定积分基本公式	(153)
3.1 积分上限的函数及其导数 3.2 定积分基本公式	
第四节 定积分的计算法	(157)
4.1 定积分的变量替代法 4.2 定积分的分部积分法 4.3 几个常用的公式	
第五节 定积分在几何上的应用	(161)
5.1 定积分的微元法 5.2 定积分在几何上的应用	
第六节 定积分在物理及经济学中的应用	(168)
6.1 定积分在物理上的应用 * 6.2 定积分在经济学中的应用	
6.3 函数在给定区间上的平均值	
第七节 定积分的近似算法	(172)
7.1 矩形法 7.2 抛物线法	
第八节 广义积分	(175)
8.1 无限区间上的广义积分 8.2 无界函数的广义积分 8.3 Γ 函数	
复习思考题 7	(181)
习题 7	(182)
自测题 7	(185)
第八章 常微分方程	(187)
第一节 常微分方程的基本概念	(187)

1.1 实例	1.2 常微分方程的基本概念	
第二节 一阶微分方程		(190)
2.1 可分离变量的方程	2.2 齐次变量型的方程	2.3 一阶线性方程
2.4 一阶微分方程应用举例		
第三节 可降阶的二阶微分方程		(198)
3.1 $y'' = f(x)$ 型	3.2 $y'' = f(x, y')$ 型	* 3.3 $y'' = f(y, y')$ 型
第四节 二阶常系数线性齐次微分方程		(205)
4.1 二阶线性齐次微分方程解的结构	4.2 二阶常系数线性齐次微分方程	
第五节 二阶常系数线性非齐次微分方程		(209)
5.1 二阶线性非齐次微分方程解的结构	5.2 二阶常系数线性非齐次微分方程	
5.3 二阶常系数线性微分方程应用举例		
* 第六节 差分方程		(218)
6.1 差分方程的基本概念	6.2 一阶常系数线性差分方程	
6.3 二阶常系数线性差分方程		
复习思考题 8		(232)
习题 8		(233)
自测题 8		(236)
第九章 向量代数与空间解析几何		(237)
第一节 空间直角坐标系		(237)
1.1 空间直角坐标系	1.2 两点间的距离公式	1.3 球面方程
第二节 向量及其线性运算		(239)
2.1 向量的概念	2.2 向量的线性运算	2.3 向量的坐标表示式
第三节 向量的数量积与向量积		(243)
3.1 向量的数量积	3.2 向量的向量积	* 3.3 混合积
第四节 空间曲面与曲线方程		(247)
4.1 曲面方程的概念	4.2 空间曲线方程	
第五节 空间平面与直线方程		(250)
5.1 平面方程	5.2 空间直线方程	
第六节 二次曲面		(255)
6.1 椭球面	6.2 椭圆抛物面	
复习思考题 9		(257)
习题 9		(257)
自测题 9		(259)
第十章 多元函数的微分学		(261)
第一节 多元函数的概念		(261)
1.1 多元函数的定义	1.2 n 维空间和点函数的概念	1.3 二元函数的极限与连续
第二节 偏导数		(266)
2.1 偏导数的定义	2.2 高阶偏导数	
第三节 复合函数和隐函数的偏导数		(271)
3.1 复合函数的偏导数	3.2 隐函数的偏导数	
第四节 全微分		(278)

4.1 全微分的定义	4.2 全微分的运算法则	4.3 全微分在近似计算中的应用	
第五节 空间曲线的切线与法平面,曲面的切平面与法线			(281)
5.1 空间曲线的切线与法平面	5.2 曲面的切平面与法线		
第六节 多元函数的极值			(283)
6.1 多元函数的极值及其判定法	6.2 最大值、最小值问题		
6.3 条件极值与拉格朗日乘数法	* 6.4 最小二乘法		
* 第七节 方向导数和梯度			(292)
7.1 方向导数	7.2 梯度		
复习思考题 10			(295)
习题 10			(296)
自测题 10			(300)
第十一章 多元函数的积分学			(301)
第一节 多元函数积分的概念			(301)
1.1 点函数积分的定义	1.2 点函数积分的性质		
第二节 二重积分			(303)
2.1 二重积分在直角坐标系下的算法	2.2 二重积分在极坐标系下的算法		
2.3 二重积分的应用举例			
第三节 曲线积分			(311)
3.1 第一类曲线积分	3.2 第二类曲线积分	3.3 格林公式	
3.4 平面上曲线积分与路径无关的条件			
第四节 三重积分			(320)
4.1 三重积分在直角坐标系下的算法	4.2 三重积分在柱面坐标系下的算法		
4.3 三重积分在球面坐标系下的算法			
* 第五节 曲面积分			(325)
5.1 第一类曲面积分的算法	5.2 第二类曲面积分	5.3 高斯公式	
复习思考题 11			(330)
习题 11			(330)
自测题 11			(333)
第十二章 无穷级数			(334)
第一节 数项级数的概念及其性质			(334)
1.1 数项级数概念	1.2 收敛级数的性质		
第二节 正项级数			(336)
2.1 比较判别法	2.2 达朗贝尔比值判别法		
第三节 变号项级数			(339)
3.1 交错级数	3.2 绝对收敛与条件收敛		
第四节 幂级数			(342)
4.1 幂级数的收敛半径与收敛区间	4.2 幂级数的运算性质		
第五节 函数的幂级数展开			(346)
5.1 泰勒级数	5.2 某些初等函数的幂级数展开式	5.3 幂级数的应用举例	
5.4 欧拉公式			
* 第六节 傅里叶级数			(351)

6.1 三角函数系的正交性	6.2 傅里叶(Fourier)级数
6.3 定义在区间 $[0, l]$ 上的函数的傅里叶级数展开式	
复习思考题 12	(358)
习题 12	(358)
自测题 12	(360)
附录一 行列式	(362)
附录二 积分表	(365)
附录三 经济管理类教学内容参考说明	(372)
习题答案	(373)

第一章

函 数

在所研究的实际问题中,限定在一非空数集内可以任意取值的量称为变量,只能取同一数值的量称为常量.考察两个相关数集中变量与变量间的关系,就引入了函数概念.

直观地说,数是对具体的量进行度量的结果,数是抽象的,量是具体的.在数学中,常常要将数与数间的某些规律应用到实际中去,为了方便,将“变数”说成“变量”,“常数”说成“常量”,正如实数与数轴上的点不加区别一样.本书中,所讲的数集,均指实数集 $\mathbf{R}$ 的子集.

函数是高等数学研究的主要对象.本章,我们复习中学学过的函数概念,并进一步介绍函数有关基本知识.

第一节 函数概念

1.1 函数的定义

例 1-1 考察大大小小的圆,其周长 l 与半径 r 都是变量,但周长与直径之比是常量 π (圆周率),即 $l/2r = \pi$,或写成

$$l = 2\pi r. \quad (1.1)$$

在(1.1)式中, r 的取值范围是数集 $A = \{r | 0 < r < +\infty\}$,对每一个 $r \in A$,按(1.1)式所示规则,都有惟一的一个 $l \in B = \{l | 0 < l < +\infty\}$ 与之对应.

例 1-2 考察脉冲发生器所产生的一个锯齿形电压波(图 1-1),其电压 U 与时间 t 的关系为:当 $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ 时, $U = t$; 当 $\frac{T}{2} < t \leq T$ 时, $U = T - t$,这一波形的数学表达式可统一写为

$$U = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}; \\ T - t, & \frac{T}{2} < t \leq T. \end{cases} \quad (1.2)$$

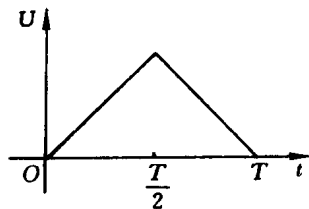


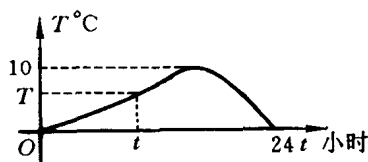
图 1-1

在(1.2)式中, t 的取值范围是数集 $A = \{t | 0 \leq t \leq T\}$,对于每一个 $t \in A$,按(1.2)式所示规则,都有惟一的一个 $U \in B = \{0 \leq U \leq \frac{T}{2}\}$ 的值与之对应.

例 1-3 (1) 自动记录仪描绘杭州春季某日一昼夜气温 $T(^{\circ}\text{C})$ 随时间 t (小时) 变化的气

温曲线(图 1-2).

根据图 1-2 所示曲线, t 的取值范围是数集 $A = \{t | 0 \leq t \leq 24\}$, 对每一个 $t \in A$, 按图示规则, 都有惟一的一个 $T \in B = \{T | 0 \leq T \leq 10\}$ 的值与之对应.



(2) 杭州地区的历史月平均气温 $T(^{\circ}\text{C})$ 有如下统计表:

图 1-2

月 气温 $T^{\circ}\text{C}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均温度	4.0	5.0	9.3	15.5	20.4	24.2	28.5	28.0	23.3	18.0	12.3	6.3

根据上表, t 的取值范围是数集 $A = \{t | t = 1, 2, 3, \dots, 12\}$, 对每一个 $t \in A$, 按上表规则, 都有惟一的一个 $T \in B = \{T | T = 4.0, 5.0, 9.3, \dots, 6.3\}$ 的值与之对应.

以上各例, 都是一个变量在一个非空数集内每取一值, 按一定的规则, 另一变量都有惟一的一个值与之对应. 两个变量间的这种对应关系, 在数学上就是函数关系. 函数这个词的意义, 经历了许多推广的阶段, 我们给出如下定义:

定义 设 A, B 是两个非空的数集, 若存在一个对应规则 f , 使得对每一个 $x \in A$, 按照这个规则, 都有惟一的一个 $y \in B$ 与之对应, 则称 f 是定义在数集 A 上的一个函数, x 称为自变量, y 称为因变量, A 称为函数 f 的定义域.

函数的定义域 A , 有时也表示为 A_f, D 或 D_f 等.

函数 f 在点 $x \in A$ 对应的 y 值, 称为函数值, 记为

$$y = f(x), x \in A. \quad (1.3)$$

函数值所组成的集合称为函数 f 的值域, 表示为

$$\{f(x) | x \in A\} \subset B.$$

对某一具体 $x_0 \in A$, 函数值也可记为 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

特别指出: 关系式 (1.3) 也表达了因变量 y 随自变量 x 的变化而变化的规律. 今后为了通过 y 来研究函数 f , 也说成 y (或 $f(x)$) 是 x 的函数.

函数常用解析法 (如例 1-1, 例 1-2)、图形法 (如例 1-3(1))、表格法 (如例 1-3(2)) 来表示.

值得注意的是: 例 1-2 是用解析法表示的一个函数, 但在 $t \in [0, \frac{T}{2}]$ 与 $t \in [\frac{T}{2}, T]$ 内, 对应 U 的值需用不同的解析式 (数学算式) 来表达. 这种在定义域内的一些不相重叠的真子集中用不同解析式所表达的函数, 称为分段表达的函数, 简称分段函数.

设有两个函数 f 和 g , 若它们的定义域 D 相同, 且对每一个 $x \in D$, 都有

$$f(x) = g(x),$$

则称这两个函数相等.

例如 $f(x) = \log_5 x^2$ 与 $g(x) = 2\log_5 |x|$ 相等, 但与 $h(x) = 2\log_5 x$ 不相等, 因为后者的定义域与前两者不相同.

例 1-4 求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\log_5(2 - x)}$ 的定义域^①.

解 其中分子的定义域为 $A_1 = \{x \mid |x| \geq 1\}$, 分母的定义域为 $A_2 = \{x \mid x < 2\}$, 又分母为零的点集为 $A_3 = \{1\}$, 因此, $f(x)$ 的定义域为

$$A = (A_1 \cap A_2) - A_3 = \{x \mid x \in (-\infty, -1] \cup (1, 2)\}.$$

例 1-5 (1) 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x}, & -2 \leq x < 0; \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 求 $f(-1), f(0), f(x-1)$.

(2) 设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x^2$, 求 $f(x)$.

解 (1) 由对应规则, 得 $f(-1) = 2, f(0) = 0$,

$$f(x-1) = \begin{cases} \sqrt{3-(x-1)}, & -2 \leq x-1 < 0 \\ x-1, & 0 \leq x-1 \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{4-x}, & -1 \leq x < 1; \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

(2) 令 $\frac{x+1}{x-1} = t$, 解得 $x = \frac{t+1}{t-1}$, 代入原式, 得 $f(t) = \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2$, 再更换变量记号, 得

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2.$$

1.2 函数的图形

在平面直角坐标系 xOy 中, 凡坐标 x, y 满足方程 $y - f(x) = 0, x \in A$ 的点 (x, y) 所组成的集合

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$$

称为定义在集合 A 上函数 $y = f(x)$ 的图形.

常见的函数的图形是平面上的一条曲线 (如图 1-3), 或分段表示的曲线, 这些曲线与平行于 y 轴的直线至多相交于一点.

例 1-6 符号 (sign) 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

其中 sgn 是函数记号, 其图形如图 1-4.

例 1-7 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ x, & x > 0, \end{cases}$$

其图形如图 1-5.

由例 1-6, 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$x \operatorname{sgn} x = |x|,$$

可见, $\operatorname{sgn} x$ 起了 x 的符号作用.

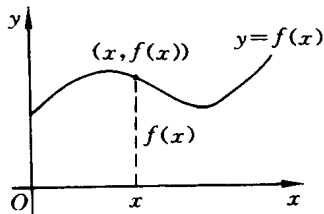


图 1-3

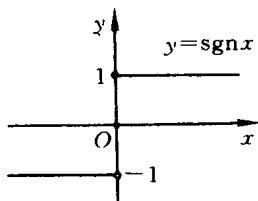


图 1-4

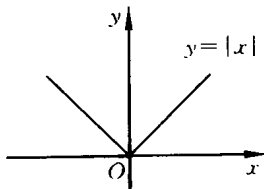


图 1-5

^① 这里是指自然定义域, 即使数学表达式有意义的自变量的取值范围.

第二节 几类有某种特性的函数

2.1 单调函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 又 $D_1 \subset D$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in D_1$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2)), \quad (2.1)$$

则称 $f(x)$ 在 D_1 上是**单调增(单调减)**函数. 又当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)), \quad (2.2)$$

则称 $f(x)$ 在 D_1 上是**严格单调增(严格单调减)**函数.

把对整个定义域 D 中具有上述(2.1)或(2.2)性质的函数, 统称为**单调函数**或**严格单调函数**.

例如 $f(x) = |x|$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上严格单调减; 在区间 $(0, +\infty)$ 上严格单调增; 在定义区间 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数.

又如 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 在定义区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调函数, 但不是严格单调函数.

2.2 有界函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在常数 $m(M)$, 使得对任一 $x \in D$, 都有

$$m \leq f(x) \quad (f(x) \leq M), \quad x \in D, \quad (2.3)$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是有**下界(有上界)**. 又若同时存在常数 m 与 M , 使得对任一 $x \in D$, 都有

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in D, \quad (2.4)$$

则称 $f(x)$ 在定义域 D 上是有**界函数**. 若记 $K = \max\{|m|, |M|\}$ ($\max$ 是 maximum 的缩写), 则(2.4)式可改写为

$$|f(x)| \leq K, \quad x \in D, \quad (2.5)$$

反之, 如果这样的正数 K 不存在, 即对任意的正数 G (不管正数 G 多么大), 总存在 $x_0 \in D$, 使得

$$|f(x_0)| > G, \quad (2.6)$$

则称 $f(x)$ 在定义域 D 上是**无界函数**.

例如 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在其定义区间 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上是有界函数, 因为存在正数 $K = 1$, 使得对定义区间上任一 x , 都有 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$.

又如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在其定义区间 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上是无界函数, 因为对任意的正数 G (不管正数 G 多么大), 总存在 $x_0 = \frac{1}{2G} \in (0, +\infty)$ 或 $x_0 = -\frac{1}{2G} \in (-\infty, 0)$, 使得

$$|f(x_0)| = \frac{1}{|x_0|} = 2G > G,$$

故 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上无界函数.

2.3 偶函数与奇函数

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 即当 $x \in D$ 时, $-x \in D$. 若对任意 $x \in D$, 都有

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)), \quad (2.7)$$

则称 $f(x)$ 在定义域 D 上是偶函数(奇函数).

对于偶函数(或奇函数), 由(2.7)式知, 当点 $(x, f(x))$ 在图形 $y = f(x)$ 上, 则与它关于 y 轴(或原点)对称的点 $(-x, f(x))$ (或 $(-x, -f(x))$) 也在该图形上. 因此, 偶函数(奇函数)的图形关于 y 轴(原点)对称(如图 1-6 与图 1-7).

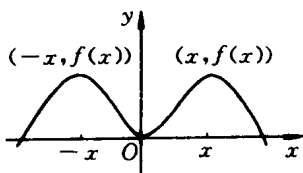


图 1-6

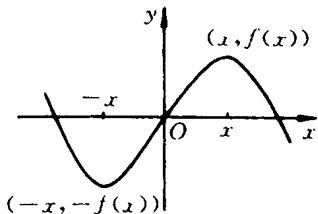


图 1-7

例如 $|x|, x^2, \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数; $\operatorname{sgn} x, x^3, \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数.

2.4 周期函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在非零常数 T , 使得对任意的 $x \in D$ 及 $x+T \in D$, 有

$$f(x+T) = f(x), \quad (2.8)$$

则称 $f(x)$ 在定义域 D 上是周期函数, 常数 T 称为 $f(x)$ 的周期. 当 T 是满足(2.8)的最小正数时, 则称 T 为 $f(x)$ 的最小正周期, 通常所说的周期是指最小正周期.

例如 $\sin x, \cos x$ 以 2π 为周期, $\tan x, \cot x$ 以 π 为周期. 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(\omega x)$ 以 $\frac{T}{\omega}$ 为周期, 其中 ω 为正常数.

第三节 反函数

3.1 反函数的定义

定义 设函数

$$y = f(x), \quad x \in A, \quad y \in B, \quad (3.1)$$

其中 x 是自变量, y 是因变量, f 的定义域是 A , 值域是 B . 反过来, 在(3.1)中, 将 y 看成自变量, x 看成因变量, 即对每一个 $y \in B$, 若存在惟一的一个 $x \in A$ 与之对应, 这个定义在 B 上的函数, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in B. \quad (3.2)$$

这里 f^{-1} 是反函数的记号, y 是自变量, x 为因变量, f^{-1} 的定义域是 B , 值域是 A .

我们知道, 函数关系由定义域与对应规则完全确定, 与变量的记号无关. 习惯上, 自变量常用记号 x 表示, 因变量常用 y 表示, 于是在 (3.2) 中, 将变量记号 x 与 y 对调, 得

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in B. \quad (3.3)$$

这样, (3.2) 与 (3.3) 同是 (3.1) 的反函数.

例如 函数 $y = 3x + 2, x \in (-\infty, +\infty)$ 的反函数是 $x = \frac{1}{3}(y - 2), y \in (-\infty, +\infty)$ 或 $y = \frac{1}{3}(x - 2), x \in (-\infty, +\infty)$.

3.2 反函数存在的条件

在函数的定义中, 对每一个自变量的值, 对应的因变量的值是惟一的, 或者说是单值的, 这样的函数也称单值函数, 否则, 所对应因变量的值多于一个时, 称为多值函数. 我们所讨论的函数, 都是单值函数. 但问题是: 单值函数的反函数不一定是单值函数! 例如, $y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)$ 是单值函数, 但反过来, 对任意的 $y \in [-1, 1]$, 却有无穷多个 x 的值与之对应. 如取 $y = \frac{1}{2} \in [-1, 1]$, 由方程 $\frac{1}{2} = \sin x$, 解得

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ 与 } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

即有无穷多个 x 的值与 $y = \frac{1}{2}$ 相对应. 那么, 一个(单值)函数具有什么条件方能存在(单值)反函数? 有如下充分条件:

定理(充分条件) 若函数 $y = f(x), x \in A$ 是严格单调增(或严格单调减)的, 则在其值域 B 上存在反函数 $x = f^{-1}(y), y \in B$, 并且, 反函数也是严格单调增(或严格单调减)的.

证略.

对于一个函数, 若在整个定义区间上非严格单调, 但若存在一个子区间, 在其上函数是严格单调的, 则在该子区间上便可得到一个严格单调的反函数.

例如, $y = \sin x$ 在定义区间 $(-\infty, +\infty)$ 的子区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调增, 故存在(主值)反函数 $x = \arcsin y$ 或 $y = \arcsin x$, 且在区间 $[-1, 1]$ 上也严格单调增.

同理, $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上严格单调减, 故存在(主值)反函数 $x = \arccos y$ 或 $y = \arccos x$, 且在 $[-1, 1]$ 上也严格单调减.

又 $y = \tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调增, 故存在(主值)反函数 $x = \arctan y$ 或 $y = \arctan x$, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 上也严格单调增.

函数 $y = 2^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增, 故存在反函数 $x = \log_2 y$ 或 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上也严格单调增.

3.3 反函数的性质与图形

若函数 $f(x), x \in A$ 是严格单调, 则对任意的 $x_1, x_2 \in A$, 有

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \textcircled{1} f(x_1) \neq f(x_2),$$

即双方是单值对应的, 可知 f 与 f^{-1} 互为反函数, 即

$$y = f(x), x \in A, y \in B \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), y \in B, x \in A. \quad (3.4)$$

于是, 得

$$f^{-1}[f(x)] = x, x \in A; \quad f[f^{-1}(y)] = y, y \in B, \quad (3.5)$$

即把 f, f^{-1} 看成运算符号, 它们紧接在一起, 则相互作用抵消. 例如

$$\log_2 2^x = x, x \in (-\infty, +\infty); \quad 2^{\log_2 y} = y, y \in (0, +\infty).$$

我们知道, $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 就函数关系来说, 它们的对应关系相反, 但就方程来说, 却是同一方程的两种表示形式, 因而在同一直角坐标系 xOy 中, 它们是同一图形 (如图 1-8).

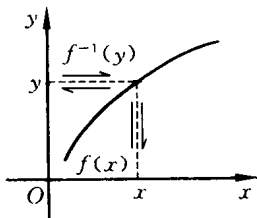


图 1-8

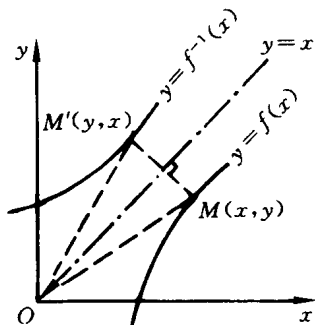


图 1-9

由于点 $M(x, y)$ 是 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形上同一点, 若将 $x = f^{-1}(y)$ 中变量记号 x 与 y 对调后, 得 $y = f^{-1}(x)$ 的图形, 于是点 $M'(y, x)$ 就在 $y = f^{-1}(x)$ 的图形上了. 易知点 $M(x, y)$ 与点 $M'(y, x)$ 关于直线 $y = x$ 对称, 故 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称 (如图 1-9).

例 1-8 求 $y = f(x) = \begin{cases} x^2, & 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ 的反函数.

解 因 $y = f(x) = x^2$ 在 $[1, 4]$ 上严格单调增, 值域是 $[1, 16]$, 故反函数 $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ 在 $[1, 16]$ 上严格单调增; 又 $y = f(x) = 2^x$ 在 $(4, +\infty)$ 上严格单调增, 值域是 $(16, +\infty)$, 故反函数 $y = f^{-1}(x) = \log_2 x$ 在 $(16, +\infty)$ 上也严格单调增. 故所求反函数是

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16; \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty. \end{cases}$$

第四节 基本初等函数

基本初等函数是指以下常用的六种函数, 它们好比器物的元件, 可构成其他较复杂的函

① 在命题中, 若 P 成立时, 推出 Q 成立, 记为 $P \Rightarrow Q$, 称 P 是 Q 的充分条件, Q 是 P 的必要条件. 若命题中, P 与 Q 互为充分必要条件, 即 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$, 记为 $P \Leftrightarrow Q$, 或说成“ P 等价于 Q ”, 有时还说成“当且仅当 P 成立时, Q 成立”, 或“ Q 成立时, 必须且只须 P 成立”.