谱分析及其在振动中的应用

朱迎善 编

华中理工大学出版社

前　　言

谱分析广泛应用于通讯、地震、石油勘探、大气湍流、核爆炸等工程领域。近年来，我国有关这方面的资料和书籍大多数是介绍一些应用方法。现在编一本既有系统理论，又有应用的谱分析书籍是十分必要的。

本书是在机械工程专业研究生的讲稿基础上，加以修改和补充而成的。修改后，加强和突出了谱分析在振动方面的应用。

在教学实践和科研过程中，深深感到系统的、易于接受的理论对工程技术工作者是有益的，而赋于工程应用和物理解释的背景对理论工作者为生产实践服务是急需的，本书的宗旨是向这个方向努力。

全书共五章，第一章和第二章是学习谱分析理论的数学工具，考虑到工程技术工作者的困难，对本书的概念和定理给出了注释。对定理的证明尽量采用简单的初等证明。其它章节是应用。在介绍应用的理论和方法时，确定性振动信号和随机振动信号的处理是分开进行的，特别是随机信号，本书严格证明了不能对信号本身直接进行富里埃变换，而必须研究相关函数的谱。这是和处理确定性信号的不同之处，而谱的数字处理方法基本上是相同的。为解决弱信号问题，本书增加了倒频谱的方法。最后一章是数据处理，在这一章中，不仅给出了处理的方法，而且为应用工作者讲清了采样、数据的取舍、提高拟合精度的注意事项和道理。

由于篇幅和数学工具的原因，本书对非线性谱估计和多参数的随机信号（随机场）谱分析未予介绍。

在本书写作过程中，曾得到业师韩志刚教授、北京大学的谢忠杰教授、程乾生教授的支持，在此表示衷心的感谢。

1988年12月

目　　录

第一章　预备知识

§1　富里埃级数

一　富里埃级数的概念

1　周期函数

定义1-1-1　若函数满足$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$以T为周期的**周期函数**，其中T为常量，称为**周期**。

周期的实质就是一个量$f(x)$，经过固定的时间段T后又重新取得它的原值，例如正弦函数$f(x)=\sin x$就是以2π为周期的函数。

2　富里埃级数

定义1-1-2　设$f(x)$是区间$[-\pi,\pi]$上的可积函数，则称

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\\
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx\ (n=1,2,\cdots),\\
b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx\ (n=1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\}\tag{1-1-1}$$

为函数$f(x)$的**富里埃系数**；而称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\tag{1-1-2}$$

为由$f(x)$导出的**富里埃级数**，并记成

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).\quad(1\text{-}1\text{-}3)$$

注1° 富里埃系数(1-1-1)被函数$f(x)$唯一确定。

注2° 在(1-1-3)式中用"～"表示函数$f(x)$与级数(1-1-2)之间的关系，而没有用"="号，这是因为由富里埃系数构造出来的级数(1-1-2)是否收敛还不清楚，就是收敛是否等于$f(x)$也不一定，而只是级数(1-1-2)在构造时通过系数与函数$f(x)$有一定的关系，所以在(1-1-3)式中用"～"表示，它的含义只是由$f(x)$"导出"富里埃级数(1-1-2)，而不能看成相等。

注3° 函数满足什么条件时，$f(x)$才真正等于级数(1-1-2)，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).\quad(1\text{-}1\text{-}4)$$

这将在本节的后面重点讨论。

注4° 我们对(1-1-4)式能否成立感兴趣的原因，是一个复杂一些的函数能否看成是正弦波或余弦波的叠加，从而给复杂波的研究提供了有利的工具。

二 函数$f(x)$的富里埃级数表示法

这里将要研究的是$f(x)$在什么条件下有(1-1-4)式成立。

定理1-1-1 如果函数$f(x)$有周期2π，且在区间$[-\pi,\pi]$内逐段可微分，则对任意的x都有

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).\quad(1\text{-}1\text{-}5)$$

注1° 该定理的证明参看文献[1]。

注2° $f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$内逐段可微分的含义是：

区间$[-\pi,\pi]$可分为有限多个段，在每个段内$f(x)$不但连续而且导数存在；在各段的衔接点处及区间$[-\pi,\pi]$端点处，$f(x)$的单侧极限和单侧导数均存在。综合起来逐段可微分即是函数$f(x)$的曲线逐段光滑的意思。

注3° $f(x+0)$、$f(x-0)$ 分别为$f(x)$ 在x点处的右极限和左极限，当x为$f(x)$的连续点时，有

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x).$$

定理1-1-2 假定$f(x)$在任意给定的区间$[-l,l]$内逐段可微分，则对于区间$[-l,l]$内的非间断点x，有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\ \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{1-1-6}$$

其中

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \qquad (k=1,2,\cdots).$$

注1° 在应用此定理时要注意 x 是连续点，且x不取两个端点。

注2° (1-1-6)式只在$[-l,l]$内成立。

注3° 此定理中的函数$f(x)$在变换 $x=\frac{ly}{\pi}$之下为

$$f(x)=f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\overset{\triangle}{=}\varphi(y).$$

对于$\varphi(y)$可用定理 1-1-1 的结果关于y展开富里埃级数，然后再把关于y的富氏级数用 $y=\frac{\pi x}{l}$换成x的级数，便得到(1-1-6)式。

注4° 此定理中的区间$[-l,l]$也可换成区间$[0,2l]$，这时(1-1-6)式在区间$[0,2l]$内的非间断点处成立，且

$$a_k=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \qquad (k=1,2,\cdots).$$

注5° 在$[-l,l]$中的$f(x)$是偶函数时，则它的富里埃级数只含有余弦项；当$f(x)$是奇函数时，则它的富里埃级数只含有正弦项。

例1-1-1 在区间$(0,2\pi)$内展开$y=\dfrac{\pi-x}{2}$。

解 先计算富里埃系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=0,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos kx dx=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin kx dx=\frac{1}{k}.$$

又因$f(x)$在区间$[0,2\pi]$内可微，所以

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} \quad (0<x<2\pi).$$

其图形为

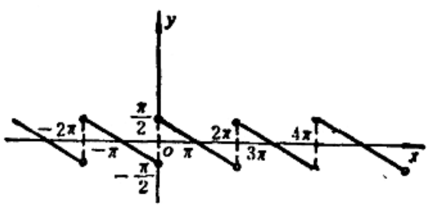


图1-1-1

例1-1-2 设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & 0<x<\pi;\\ -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi<x<0;\\ 0, & x=k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\end{cases}$$

解 $f(x)$是以2π为周期的函数，我们先在区间$[-\pi,\pi]$内展开富里埃级数，下面计算富氏系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\cos kx dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos kx dx=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin kx dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin kx dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{k}, & k\text{为奇数};\\ 0, & k\text{为偶数}.\end{cases}$$

因$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$内逐段光滑，所以

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

其图形为

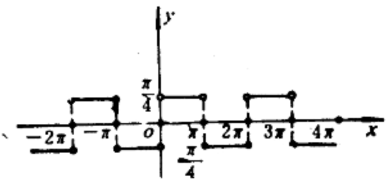


图1-1-2

三　富里埃级数的复数表示

设函数$f(t)$在区间$[-T,T]$上逐段可微，且以$2T$为周期，则在区间$[-T,T]$的连续点t处$f(t)$可展成富里埃级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),\qquad (1\text{-}1\text{-}7)$$

其中

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(t)\cos\frac{k\pi}{T}t\,dt\qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

$$b_k=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(t)\sin\frac{k\pi}{T}t\,dt\qquad (k=1,2,\cdots).$$

令　$c_0=\dfrac{a_0}{2},c_k=\dfrac{a_k-ib_k}{2},c_{-k}=\dfrac{a_k+ib_k}{2}\ (k=1,2,\cdots)$，

则

$$c_0=\frac{a_0}{2},c_k=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)\exp\left[-ik\frac{\pi}{T}t\right]dt$$

$$(k=\pm1,\pm2,\cdots),$$

其中i为虚数单位，这时(1-1-7)式又可写成

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\,e^{i\frac{k\pi}{T}t}.\qquad (1\text{-}1\text{-}8)$$

(1-1-8)式称为$f(t)$的**富里埃级数的复数表示**.

§2　富里埃积分公式及富里埃变换

一　富里埃积分公式

1　设$f(t)$是定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的函数，对于任意的$T>0$，令$f_T(t)$表示在区间$[-T,T]$上有$f_T(t)=f(t)$，且

$f_T(t)$是以$2T$为周期的函数，显然

$$\lim_{T\to\infty} f_T(t)=f(t)。\tag{1-2-1}$$

2　如果$f(t)$在任意有限区间内都是逐段可微的，则$f_T(t)$可展成富氏级数

$$f_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_k t},\tag{1-2-2}$$

其中$\omega_k=\dfrac{k\pi}{T}$，$c_k=\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} f_T(\tau)e^{-i\omega_k\tau}d\tau$。

3　将系数c_k的积分表示代入(1-2-2)式，则有

$$f_T(t)=\frac{1}{2T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T}^{T} f_T(\tau)e^{-i\omega_k\tau}d\tau\right]e^{i\omega_k t},\tag{1-2-3}$$

令　$\Delta\omega=\omega_k-\omega_{k-1}=\dfrac{\pi}{T}$，则

$$f_T(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T}^{T} f_T(\tau)e^{-i\omega_k\tau}d\tau\right]e^{i\omega_k t}\Delta\omega_k。$$

由于$\Delta\omega\to 0$与$T\to\infty$等价，再由(1-2-1)式，有

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f_T(\tau)e^{-i\omega_k\tau}d\tau\right]e^{i\omega_k t}\Delta\omega。\tag{1-2-4}$$

4　当t固定时，记

$$G_T(\omega)\triangleq\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f_T(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t},$$

则(1-2-4)式可写成

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_T(\omega_k)\Delta\omega。$$

令

$$\lim_{T\to\infty} G_T(\omega)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}\triangleq G(\omega)。$$

由定积分的定义，有

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega. \tag{1-2-5}$$

定义1-2-1 设$f(t)$是定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的函数，且对任意有限区间$[-T,T]$它是逐段可微的，则它展成的(1-2-5)式称为函数$f(t)$的**富里埃积分公式**。

注1° (1-2-5)式的推导是不严格的，因为它只是从形式上推导出来的。

注2° 这里的广义积分只是在主值意义下：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\triangleq\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f(t)dt.$$

注3° 如果$f(t)$除满足在任意有限区间内逐段可微外，还满足绝对可积条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty,$$

则(1-2-5)式成立。

注4° 富里埃积分公式不仅说明非周期函数展成积分的形式，更主要的是它为富里埃变换理论打下了基础。

二 富里埃变换

定义1-2-2 假设函数$f(t)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的任意有限区间内逐段可微，且满足条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty.$$

并记 $$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{1-2-6}$$

则称$G(\omega)$为$f(t)$的富里埃变换，记为$G(\omega)=F[f(t)]$，而

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \qquad (1\text{-}2\text{-}7)$$

(1-2-7) 式称为 $G(\omega)$ 的富里埃逆变换，记为 $f(t)=F^{-1}[G(\omega)]$。

注1° 条件$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$能保证$f(t)$的富氏变换$G(\omega)$的存在。

注2° $f(t)$除满足条件$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$之外，还在区间$(-\infty,+\infty)$中任意有限区间上逐段可微，因此富里埃积分公式(1-2-5)成立。这说明富氏变换(1-2-6)及逆变换(1-2-7)同时存在。

注3° 条件$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$只是富氏变换存在的充分条件，不满足此条件的函数，比如$f(t)=\sin t$的富氏变换也可能存在。至于广义函数的富氏变换我们另外研究。

注4° 关于富氏变换的应用将在第三章中深入说明。

例1-2-1 闸门函数的变换．设$f_\tau(t)$是一个矩形单脉冲

$$f_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|<\frac{\tau}{2};\\ 0, & |t|\geqslant\frac{\tau}{2}.\end{cases}$$

如图1-2-1所示。

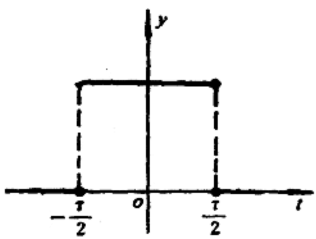


图1-2-1

解 显然$f_\tau(t)$符合富氏变换的条件，所以其富氏变换为

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\tau}(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{i\omega}[e^{i\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}]=\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

今后记$s_a(x)=\frac{\sin x}{x}$，它称为**采样函数**。采样函数$y=s_a(x)$的图象如图1-2-2所示。

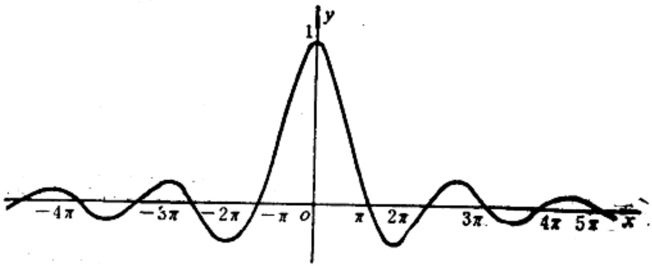


图1-2-2

例1-2-2 单边指数函数的变换。

$$f(t)=e^{-at}u(t),\quad u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

其中$a>0$为常数。其图象如图1-23所示。

解 $$G(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

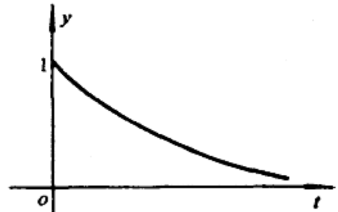
$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-(a+i\omega)t}dt=\frac{1}{a+i\omega}.$$

其逆变换为

$$F^{-1}[G(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a+i\omega}e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{a\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega$$

$$= \begin{cases} 0, & t<0; \\ \frac{1}{2}, & t=0; \\ e^{-at}, & t>0. \end{cases}$$



$f(t)=e^{-at}u(t)$

图1-2-3

这里$F^{-1}[G(\omega)]$与$f(t)$在$t=0$处的值不一样，这是因为富里埃积分公式(1-2-5)在$f(t)$的连续点处成立，在$f(t)$的间断点处，(1-2-5)式左端应为$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$，而不是$f(t)$.

§3 Dirac函数及其富里埃变换

一 Dirac函数

Dirac函数也称为δ-函数，在工程技术中起着重要作用，在应用中通常称δ-函数为单位脉冲函数.

定义1-3-1 定义

$$\delta(t-a)=\begin{cases}+\infty, & t=a; \\ 0, & t\neq a,\end{cases} \quad 且\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1,$$

称这样的函数为**Dirac函数**或**δ-函数**.

注1° δ-函数不再是高等数学中介绍的那种普通函数了．因为当$t=a$时$\delta(t)$不再有唯一“确定的数”对应，而是$+\infty$.因此研究它及它的富里埃变换用以前的工具不行了．在严密的数学理论中，δ-函数是广义函数的一种，关于广义函数的理论远

远超出本书的范围，这里不予介绍。

注2° 为解决δ-函数的富氏变换，我们用一种虽然不严格但工程技术界容易接受的方法来处理。首先，工程上常把δ-函数看成某些普通函数列的极限，例如：令

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon;\\ 0, & t>\varepsilon.\end{cases}$$

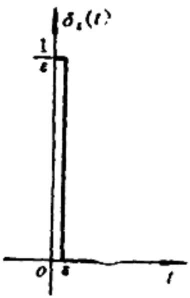


图1-3-1

其图形如图1-3-1所示。

把$\delta(t)$看成这样函数列$\{\delta_\varepsilon(t)\}$的极限，即

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\delta_\varepsilon(t).$$

注3° $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)dt=1.$

此式成立是因为$\{\delta_\varepsilon(t)\}$是$\delta$-函数列[4]。

注4° 若$f(t)$为普通的连续函数，则有

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0);\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-a)dt=f(a).\end{cases}\tag{1·3-1}$$

二 δ-函数的富里埃变换

δ-函数的富里埃变换为

$$G(\omega)=F[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt=e^{-i\omega t}\Big|_{t=0}=1.$$

这是根据δ-函数性质(1-3-1)式而得到的。它的逆变换为

$$\delta(t)=F^{-1}[G(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$