教育部高职高专规划教材

高等数学训练教程

韩志刚 王秀芬 主编

王志福 主审

化学工业出版社

教材出版中心

教育部高职高专规划教材

高等数学训练教程

韩志刚　王秀芬　主编
王志福　主审

化学工业出版社
教材出版中心
·北　京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学训练教程/韩志刚，王秀芬主编．—北京：
化学工业出版社，2004.4
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-5011-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．①韩…②王…　Ⅲ．高等数学-高等
学校：技术学院-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 017585 号

教育部高职高专规划教材
高等数学训练教程
韩志刚　王秀芬　主编
王志福　主审
责任编辑：陈有华　张建茹
文字编辑：刘志茹
责任校对：顾淑云
封面设计：郑小红
*
化学工业出版社
教材出版中心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
发行电话：（010）64982530
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市宇新装订厂装订
开本 787 毫米×1092 毫米 1/16　印张 16　字数 393 千字
2004 年 5 月第 1 版　2004 年 5 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-5011-9/G・1320
定　价：24.00 元

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分，改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999 年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版 500 种，用 5 年左右时间完成。这 500 种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分吸取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用 2～3年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用 2～3 年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001 年 4 月 3 日

前 言

高等数学是高职高专院校重要的基础理论课，学生学完高等数学课程后所获得的数学知识在他以后的学习中起着重要作用，这些知识对学生顺利地学习其他理论课及专业课都是必要的．为了帮助学生很好地理解和掌握数学的基础知识、基本技能，根据教育部有关文件精神，本着以应用为目的，以“必需、够用为度”的原则编写了这本《高等数学训练教程》，这既是高职高专学生必备的数学训练指导用书，也可作为教师的教学参考资料．

本书各章节与化学工业出版社出版的教育部高职高专规划教材《高等数学（三年制）》一书的各章节相对应．在编写中，努力体现高等职业技术教育的教材应具有“实际、实用、实践”性，注意体现高等职业技术教育的特点．本训练教程在每章前都给出了“本章综合解说”，主要是为引起学生的学习兴趣．每节分五个模块：“目标要求”，使学生在学习每节时应明确学习任务和达到的学习目标；“教材内容剖析”，解决学生难以理解和易混淆的问题；“典型例题精讲”，把例题分成若干类，指出各类问题的解题规律，说明解题的注意事项；“规律方法总结”，帮助学生对所学知识进行复习和回顾；“随堂自我检查题”，检验学生自己对所学知识掌握的情况．每章后又给出了本章自测题，既注重知识的训练，又有利于学有余力的学生进一步提高．

全书由韩志刚、王秀芬任主编，参加编写的还有白玉芳、张宏斌。其中第一章、第四章、第七章由王秀芬编写，第二章、第五章由韩志刚编写，第三章、第六章、第九章由白玉芳编写，第八章由张宏斌编写，韩志刚负责全书的统稿工作．

渤海大学的王志福教授对全部书稿进行认真审阅，并提出许多有价值的修改建议，在此表示衷心的感谢．

本教材在编写过程中得到了化学工业出版社的热情关怀和指导，在此一并致谢．

限于编者的水平，不妥之处在所难免，恳请广大师生、读者不吝指正．

编　者

2004 年 1 月

内 容 提 要

本教材是按照教育部对高职高专《高等数学》课程学习要求而编写，全书共分九章，内容有函数、函数极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学．每章前编有本章综合解说，章后编有自测训练题．每节分五个模块，即目标要求、教材内容剖析、典型例题精讲、规律方法总结、随堂自我检查题等．

本教材对三年制的《高等数学》教材讲解细致，真正体现围绕重点、突破难点，重点难点详细讲析，例题配置精，既有解题过程，又有思路点拨，一题多解，多题一法，变通训练，总结规律，力争使学生做到知识迁移延伸，逐次深入．

本教材是与化学工业出版社出版的三年制《高等数学》教材相配套使用的教材，同时也可作为高职高专学生在学习高等数学时的学习参考书，也可作为教师的教学参考资料．

目 录

第一章　函数、极限与连续

本章综合解说

函数是客观世界中变量之间相互依赖关系的一种数学抽象，是定性定量地研究各种变化的量的一个重要工具，函数在科技、经济等领域中普遍存在，函数是高等数学的主要研究对象。极限描述的是变量在某个变化过程中的变化趋势，在日常生活中经常用到，例如，从企业发展趋势来判断它的前途，从市场变化趋势来预测产品的需求情况等，从数学上看便是极限思想。连续是函数的一种重要性态，它与函数的极限密切相关。在自然界中有很多现象，如气温的变化、河水的流动、植物的生长等，都是连续变化的，这种现象在数学上反映函数的连续性.

本章从函数的概念入手，讨论函数的特性、复合函数、初等函数，进而讨论函数的极限及函数的连续性.

第一节　函　　数

一、目标要求

1. 理解函数的概念，理解分段函数的概念. 理解复合函数的概念，会正确地分析复合函数的复合过程.

2. 了解反函数的概念，会求简单函数的反函数.

3. 掌握函数的奇偶性，掌握函数的单调性，理解函数的有界性，了解函数周期性的概念.

4. 掌握基本初等函数的解析表达式及基本性质，了解初等函数的概念.

二、教材内容剖析

1. 函数的概念

理解函数定义，要掌握以下几个方面的内容.

(1) 函数的定义域　自变量 x 的取值范围，称为函数的定义域. 当函数用解析式 $y=f(x)$给出时，其定义域就是使解析式有意义的所有实数的集.

对于实际问题所建立的函数的定义域，则需要符合实际意义.

(2) 函数的对应法则　函数定义中的 f 就是反映 y 与 x 的对应法则，即 y 与 x 的函数关系. 例如，$y=x^3$ 的对应法则是“因变量是自变量的立方”，根据这个法则，对任意自变量 x 的值，都有一个确定的 y 与之对应.

(3) 两个函数相同的概念　由函数定义可知，一个函数给定三个因素：定义域 D、对应

法则 f 和值域 M，其中前两者是确定函数的两要素.

因为定义域 D 和对应法则 f 是确定一个函数的两个要素，所以只有当两个函数的定义域 D 和对应法则 f 都相同时，它们才是相同的函数.

(4) 运用函数记号、求函数值　对于自变量 x 在 D 中的某一个值 x_0，由法则 f 对应的因变量，称为函数 $f(x)$ 在 x_0 的函数值，记作 $f(x_0)$.

$f(x)$ 表示将法则 f 施用于 $x(x\in D)$，$f(x_0)$ 表示 f 施用于 $x_0(x_0\in D)$，还有 $f[\varphi(x)]$ 表示 f 施用于 $\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 是 x 的数学表达式，且 $\varphi(x)\in D$.

为了正确使用函数的记号 f，看下例：

若　$f(x)=x^2+1$，

那么有

$$f(2)=2^2+1=5,\ f(x_0)=x_0^2+1,$$
$$f(x-1)=(x-1)^2+1=x^2-2x+2,$$
$$f[f(x)]=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2.$$

2. 分段函数

分段函数是在定义域的不同部分用不同数学表达式表示的函数. 函数关系要用两个或两个以上的数学表达式来表示.

分段函数应注意以下几点：

① 分段函数是用几个数学表达式合起来表示一个函数，而不是几个函数；

② 由于函数式是用几个数学表达式分段表示的，所以各段的定义域需要明确标出；

③ 对分段函数求函数值时，各部分定义域内点的函数值代入相应的数学表达式中；

④ 分段函数的定义域是各部分定义域的并集.

3. 函数的几种特性

(1) 函数的奇偶性　判断函数奇偶性的方法如下.

① 根据函数奇偶性的定义，对给定函数 $f(x)$，当定义域关于原点对称时，计算 $f(-x)$，若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数；若两式均不成立，则 $f(x)$ 为非奇非偶函数. 如果 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称，则函数是非奇非偶函数.

② 根据函数的性质，一般两个奇（偶）函数之和为奇（偶）函数；两个奇（偶）函数之积为偶函数；奇函数与偶函数之积为奇函数.

③ 利用函数图形的对称性，图形关于坐标原点对称的函数为奇函数；图形关于 y 轴对称的函数为偶函数.

(2) 函数的单调性　在讨论函数单调性时必须指出它的区间. 例如，函数 $y=x^2$ 的在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少；在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的；而在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的.

判定函数单调性的方法如下.

根据函数单调性的定义，在给定函数 $f(x)$ 的定义区间内任意取两点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，若总有 $f(x_1)-f(x_2)<0$，则 $f(x)$ 单调增加；若总有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，则 $f(x)$ 单调减少.

(3) 函数的有界性　函数的有界性是函数本身的性质，它与所讨论的区间有关. 例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的；而函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界的；

函数 $y=\frac{1}{x}$ 在（0，1］内是无界的，但在（a，$+\infty$）（$a>0$，且 a 是常数）内是有界的.

函数有界与函数有上界或下界是不同的概念，不要混淆. 例如，函数 $y=-x^2$ 在［0，$+\infty$）内是无界的，但有上界 0；而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在（0，1］内是无界的，但有下界 1.

判定函数的有界性，通常用函数有界性的定义来判断函数的有界，确定函数 $f(x)$ 在给定区间上有界，一般有如下情况.

① 若能找到一个正数 M，使得不等式 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in D$ 成立即可.

② 若能找到两个数 m 和 M，且 $m<M$，使不等式

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in D \text{ 成立即可.}$$

③ 若函数 $f(x)$ 在闭区间［a，b］上单调增（减），因

$$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)[f(a)\geqslant f(x)\geqslant f(b)],\ x\in[a,b],$$

则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

（4）函数的周期性　判定函数的周期性，一般是根据函数的周期性定义或将函数转化为已知周期函数来判断.

4. 反函数

对于反函数应从以下几个方面掌握.

（1）反函数的图形　在同一坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 它们是同一个函数，其函数图形是同一条曲线；而 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域和值域互换.

（2）求一个函数反函数的一般步骤　先将已知函数 $y=f(x)$ 中的 y 作为已知量解出 x，得 $x=f^{-1}(y)$；再将关系式 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 和 x 位置互换，得到了函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

5. 初等函数

（1）复合函数需要从以下几个方面理解.

① 不是任意两个函数 $y=f(u)$、$u=\varphi(x)$ 都能复合成一个复合函数. 由复合函数的定义可知，当自变量 x 在函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域 A 或 A 的子集上取值时，所对应的 $u=\varphi(x)$，都能使 $y=f(u)$ 有意义时，$u=\varphi(x)$ 和 $y=f(u)$ 才能构成一个复合函数.

例如，函数 $y=\arccos u$ 与 $u=x^2+3$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u=x^2+3$ 的定义域（$-\infty$，$+\infty$）中的任意 x 值所对应的 u 值都大于等于 3，不能使 $y=\arccos u$ 有意义.

② 复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有多个中间变量，这些中间变量是经过多次复合产生的.

（2）初等函数需要理解以下两方面问题.

① 由多个基本初等函数与常数构成一个初等函数.

② 将一个初等函数分解成由基本初等函数和基本初等函数与常数的四则运算或复合而成.

三、典型例题精讲

【例 1-1】 求下列函数的定义域：

（1）$y=\frac{4}{x^2-1}-\sqrt{2x-1}$；　　（2）$y=\frac{1}{\ln(2-x)}+\arcsin\frac{x-1}{2}$.

解 (1) 要使函数有意义，分母必不等于 0，即 $x^2-1\neq 0$；同时偶次根号内非负，即 $2x-1\geqslant 0$，

因此要求满足 $\begin{cases}x^2-1\neq 0\\2x-1\geqslant 0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}x\neq\pm 1\\x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$

所以函数定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$；

(2) 要使函数有意义，对数的真数必大于 0，即 $2-x>0$；同时分母不等于 0，即 $2-x\neq 1$；在 $\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 中，$\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$，

因此要求满足 $\begin{cases}2-x>0\text{ 且 }2-x\neq 1\\\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x<2\text{ 且 }x\neq 1\\-1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

所以函数定义域为 $[-1,1)\cup(1,2)$.

注意 用解析式表示的函数，求定义域时，一般有以下情况：

① 分式的分母不等于 0；

② 偶次根号内的式子非负；

③ 对数的真数大于 0，底数大于 0 且不等于 1；

④ 正切符号内的式子不等于 $kx+\dfrac{\pi}{2}$，(k 是整数)；

⑤ 余切符号内的式子不等于 $k\pi$，(k 是整数)；

⑥ 反正弦、反余弦符号内的式子的绝对值小于等于 1；

⑦ 上述几种情况同时在一个函数中出现，应取其交集.

【例 1-2】 (1) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，求 $f(2x-1)$，$f(\ln x)$ 的定义域.

(2) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$，求 $f(3^x)$ 的定义域.

解 (1) 求函数 $f(2x-1)$ 的定义域，就是确定该函数自变量 x 的取值范围，根据条件得

$$0<2x-1\leqslant 1,\quad \text{即}\quad \frac{1}{2}<x\leqslant 1,$$

因此，函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right]$，

对于函数 $f(\ln x)$ 同样有 $0<\ln x\leqslant 1$，

由对数函数的性质得 $1<x\leqslant e$，因此函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(1,e]$；

(2) 对于函数 $f(3^x)$，由已知条件得 $1<3^x<+\infty$，

由指数函数的性质得 $0<x<+\infty$，因此，函数 $f(3^x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

【例 1-3】 旅客乘坐火车时，随身携带的物品不超过 20kg 免费，超过 20kg 部分，每千克收费 0.5 元，超过 50kg 部分，每千克再加收 60%. 试列出收费与物品质量的函数关系，并指出定义域.

解 设物品的质量为 $x$kg，收费为 y 元，

当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，$y=0$；

当 $20<x\leqslant 50$ 时，$y=0.5(x-20)$；

当 $x>50$ 时，收费由两部分组成：50kg 部分，收费为 $0.5\times 30=15$；超过 50kg 部分，

收费为 $0.5(x-50)+0.5(x-50)\cdot 60\%=0.8(x-50)$，即 $y=15+0.8(x-50)$.

于是得收费 y 与物品质量 x 之间的函数关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 0.5(x-20), & 20<x\leqslant 50\\ 15+0.8(x-50), & x>50\end{cases}$$

函数的定义域为 $x\geqslant 0$.

【例 1-4】 下列各对函数是否相同，为什么？

(1) $f(x)=\cos x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

(2) $f(x)=\lg x^3$ 与 $g(x)=3\lg x$；

(3) $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$；

(4) $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$ 与 $g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$.

解 (1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，都是 $(-\infty,+\infty)$；但对应法则不同，因为

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$$

故两个函数不同；

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同，都是 $(0,+\infty)$；对于任意 $x\in(0,+\infty)$，恒有 $\lg x^3=3\lg x$，因此对应法则相同，故两个函数相同；

(3) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；但对应法则不同，当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，而 $g(x)>0$ 或 $g(x)<0$，故两个函数不同；

(4) 函数 $f(x)$ 要求 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$，

即 $\begin{cases}x-1>0\\ x-2>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1<0\\ x-2<0\end{cases}$，

解得 $x>2$ 或 $x<1$，即函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$；

函数 $g(x)$ 要求 $\begin{cases}x-1>0\\ x-2>0\end{cases}$，解得 $x>2$，即函数的定义域为 $(2,+\infty)$，故两个函数不同.

【例 1-5】 设函数 $f(x+1)=x^2-x-1$，求 $f(x)$.

解法一 令 $u=x+1$，则 $x=u-1$，代入 $f(x+1)$ 化简得

$$f(u)=(u-1)^2-(u-1)-1=u^2-3u+1,$$

所以

$$f(x)=x^2-3x+1.$$

解法二 将右边凑成以 $x+1$ 为变量的形式，

$$\begin{aligned}f(x+1)&=x^2-x-1=(x^2+2x+1)-3(x+1)+1\\&=(x+1)^2-3(x+1)+1,\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=x^2-3x+1.$$

注意 该例常用的方法有以下两种：①换元法，如解法一；②凑变量法，如解法二.

【例 1-6】 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 1\\ x^2-1 & x>1\end{cases}$，求 $f(x+1)$.

解 将 $f(x)$ 中的所有 x 都换作 $x+1$，得

$$f(x+1)=\begin{cases}2(x+1)+1, & x+1\leqslant 1\\ (x+1)^2-1, & x+1>1\end{cases}$$ 即

$$f(x+1)=\begin{cases}2x+3, & x\leqslant 0\\ x^2+2x, & x>0\end{cases}.$$

【例 1-7】 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$；　　(2) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3) $f(x)=\frac{\tan x}{2+x^2}-3$.

解　(1) 因为 $f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{-(-x)})=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=f(x)$，

所以 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 为偶函数；

(2) 因为 $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})$

$$=\log_a\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$

所以 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数；

(3) 因为 $f(-x)=\frac{\tan(-x)}{2+(-x)^2}-3=\frac{-\tan x}{2+x^2}-3$，

可知　$$f(-x)\neq f(x)\ ,f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)=\frac{\tan x}{2+x^2}-3$ 是非奇非偶函数.

注意　可以看出 $g(x)=\frac{\tan x}{2+x^2}$ 是奇函数，奇函数加上一个任意常数后既不是奇函数，也不是偶函数. 而偶函数则不然，偶函数加上任意一个常数后仍是偶函数.

【例 1-8】 判断函数 $f(x)=3x^2+2$ 的单调性.

解　函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，设任意两点 x_1，$x_2\in(-\infty, +\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=3x_1^2+2-(3x_2^2+2)=3(x_1^2-x_2^2),$$

当 x_1，$x_2\in(-\infty, 0)$ 时，$x_1^2>x_2^2$，即 $x_1^2-x_2^2>0$，于是 $3(x_1^2-x_2^2)>0$，
所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，因此函数 $f(x)=3x^2+2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是单调减小的；

当 x_1，$x_2\in[0, +\infty)$ 时，$x_1^2<x_2^2$，即 $x_1^2-x_2^2<0$，于是 $3(x_1^2-x_2^2)<0$，
所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，因此函数 $f(x)=3x^2+2$ 在 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的；故函数 $f(x)=3x^2+2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

【例 1-9】 证明下列函数有界：

(1) $y=\sin x$；　　(2) $y=\frac{1}{3+x^2}$.

证明　(1) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，对于任意的 $x\in(-\infty, +\infty)$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，于是找到了正数 $M=1$，使得 $|\sin x|\leqslant 1$，因此函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有界；

(2) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，对于任意的 $x\in(-\infty, +\infty)$，都有 $x^2+3\geqslant 3$，即，$0<\frac{1}{3+x^2}\leqslant\frac{1}{3}$，因此函数 $y=\frac{1}{3+x^2}$在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

【例 1-10】 讨论函数 $f(x)=e^x$，在给定区间上的有界性.

(1) $(0, 2)$； (2) $(0, +\infty)$.

解 (1) 因为函数 $f(x)=e^x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的，对任意 $x\in(0, 2)$，都有 $e^0<e^x<e^2$，即 $1<e^x<e^2$，故函数 $f(x)=e^x$ 在区间 $(0, 2)$ 内是有界的.

(2) 函数 $f(x)=e^x$ 的值域为 $(0, +\infty)$，该函数在其定义域内是单调增加的，当 $x=0$ 时，$e^0=1$；当 $x>0$ 时，$e^x>1$，

若取正数 M，不论 M 有多大，总有 $x_0>\ln M$ 存在，$x_0\in(0, +\infty)$，使得 $e^{x_0}>M$，故函数 $f(x)=e^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是无界的.

注意 函数的有界性必须在一个给定的区间内讨论，如本例中的函数 $f(x)=e^x$ 在 $(0, 2)$ 内有界，而在 $(0, +\infty)$ 内无界；若所给的函数没有指定区间，意指在函数的定义域内讨论，在讨论的过程中需要确定函数的定义域，然后在其定义域内讨论函数有界性，如【例 1-9】.

【例 1-11】 求下列函数的反函数：

(1) $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})$； (2) $y=x^2+1$.

解 (1) 由 $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})$解出 x，先将 $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})$化为指数函数 $2^y=x+\sqrt{x^2-1}$，

整理得
$$2^{2y}-2x2^y+x^2=x^2-1,$$

解得
$$x=\frac{2^{2y}+1}{2\times 2^y},\quad \text{即 } x=\frac{2^y+2^{-y}}{2},$$

将 x 与 y 的位置互换，得 $y=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$，

故所求函数的反函数为 $y=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$；

(2) 函数 $y=x^2+1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，该函数在其定义域内不是单调函数，所以不存在反函数，但如果把 $y=x^2+1$ 的定义域分成两个区间 $(-\infty, 0]$ 与 $[0, +\infty)$，函数分别在两个区间内是单调函数，

由 $y=x^2+1$ 解得，$x=\pm\sqrt{y-1}$，

因此函数 $y=x^2+1$ 在 $(-\infty, 0]$ 内的反函数为 $y=-\sqrt{x-1}$；

在 $[0, +\infty)$ 内的反函数为 $y=\sqrt{x-1}$.

【例 1-12】 指出下列函数是由哪些函数复合而成的：

(1) $y=\ln^2\sin\sqrt{x}$； (2) $y=2\cos(2^{\tan\frac{1}{x}})$；

(3) $y=\arcsin^2(x^3+2^x)$； (4) $y=(x^3\cos\sqrt{x})^{-2}$.

分析 一个函数的复合过程一般应由最外层向内层进行，每一步的中间变量应是基本初等函数或基本初等函数的四则运算.

解 (1) 函数 $y=\ln^2\sin\sqrt{x}$是由 $y=u^2$，$u=\ln v$，$v=\sin w$，$w=\sqrt{x}$复合而成；

(2) 函数 $y=2\cos(2^{\tan\frac{1}{x}})$是由 $y=2\cos u$，$u=2^v$，$v=\tan w$，$w=\frac{1}{x}$复合而成；

(3) 函数 $y=\arcsin^2(x^3+2^x)$是由 $y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=x^3+2^x$ 复合而成；

(4) 函数 $y=(x^3\cos\sqrt{x})^{-2}$是由 $y=u^{-2}$，$u=vw$，$v=x^3$，$w=\cos t$，$t=\sqrt{x}$复合而成.

四、规律方法总结

1. 函数定义域的求法

① 初等函数是由多个基本初等函数构成的，求其定义域，求出使各部分函数有意义的区间的交集即可.

② 由实际问题所建立的函数的定义域应符合实际意义.

2. 判断函数奇（偶）性时应注意的问题

奇（偶）函数的定义域关于原点对称，定义域关于原点对称的函数不一定是奇（偶）函数，定义域不关于原点对称的函数一定是非奇非偶函数.

3. 函数的单调性的证明方法

在函数 $f(x)$的定义区间内任取两点 x_1，x_2，设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即两不等号同向[或 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即两不等号反向]，就可说函数 $f(x)$在该定义区间内单调增（或单调减）.

4. 写一个函数的复合过程时，应由外层向内层进行，每一个中间变量必须是基本初等函数或是基本初等函数的四则运算.

五、随堂自我检查题

1. 单项选择题 .

(1) 函数 $f(x)=1+x+2x^2+\cdots+nx^n(n\in\mathbf{N})$是(　).

A. 基本初等函数；　B. 初等函数；　C. 复合函数；　D. 非初等函数.

(2) 若 $f(e^x)=x^2-2x$，则 $f(x)$等于（　）.

A. $\ln^2 x-2\ln x$；　B. $\ln x-2\ln x$；　C. $\ln x-\ln^2 x$；　D. $\ln x+2\ln x$.

(3) 已知函数 $f(x)$的定义域为 $(-1, 0)$，则下列函数中（　）的定义域为 $(0, 1)$.

A. $f(-x)$；　B. $f(x+1)$；　C. $f(x^2+1)$；　D. $f(x^2-1)$.

(4) $y=\dfrac{1}{\arcsin f(x)}$所构成一个以 x 为自变量，以 y 为因变量的复合函数的充分条件是（　）.

A. $f(x)\neq 0$；　B. $|f(x)|\leqslant 1$；

C. $\arcsin f(x)\neq 0$；　D. $|f(x)|\leqslant 1$ 且 $f(x)\neq 0$.

(5) 下列各对函数中表示同一个函数的是(　).

A. $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

B. $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

C. $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$与 $y=\sqrt{x(x-1)}$；

D. $y=\ln(2-x)(x-1)$ 与 $y=\ln(2-x)+\ln(x-1)$.

(6) 函数 $f(x)=|x^2-1|$在区间（　）是单调有界的.

A. $[-1, 1]$；　B. $[-2, 0]$；　C. $(1, +\infty)$；　D. $[-2, -1]$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{x}{x^2+3x}$；　　(2) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$；　　(4) $y=\frac{1}{\ln(2-x)}+\sqrt{100-x^2}$.

3. 设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$和 $f\{f[f(x)]\}$.

4. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，证明 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}4x^2, & 0<x<2\\ 1, & 2<x\leqslant 4\\ \frac{x^2}{4}, & x>4\end{cases}$

求(1) $f(x)$的定义域；　　(2) $f(1)$，$f(3)$，$f(4)$，$f(5)$；

(3) $f(x)$的值域；　　(4) 作出 $y=f(x)$的图形.

6. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$；　　(2) $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$；

(3) $f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}+5$；　　(4) $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)$.

7. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=2^{\cos\frac{1}{x}}$；　　(2) $y=\sqrt{\lg\tan(\sqrt{x}-1)}$；

(3) $y=\lg^3\arctan\sqrt{x}$；　　(4) $y=\cos(x^2+\ln x)^5$.

8. 设火车从甲站出发，以 0.5km/min^2 的匀加速度前进，经过 2min 后开始匀速行驶，再经过 7min 后以 0.5km/min^2 匀减速到达乙站，试将火车在这段时间内所行驶的路程 s 表示为时间 t 的函数，并作出其函数的图形.

答案与提示

1. (1) B；　(2) A；　(3) A；　(4) D；　(5) D；　(6) D.

2. (1) $(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,+\infty)$；　(2) $[-2,-1]\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

(3) $[1,4]$；　(4) $[-10,1)\cup(1,2)$.

3. $\frac{x}{1-2x}$，$\frac{x}{1-3x}$.　　4. 略.

5. (1) $(0,2)\cup(2,+\infty)$；(2) 4，1，1，$\frac{25}{4}$；(3) $(0,+\infty)$；(4) 略.

6. (1) 奇函数；(2) 奇函数；(3) 非奇非偶函数；(4) 偶函数.

7. (1) $y=2^u$，$u=\cos y$，$v=\frac{1}{x}$；

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=\lg v$，$v=\tan w$，$w=\sqrt{x}-1$；

(3) $y=u^3$，$u=\lg v$，$v=\arctan w$，$w=\sqrt{x}$；

(4) $y=\cos u$，$u=v^5$，$v=w+t$，$w=x^2$，$t=\ln x$.

8. $s=\begin{cases}0.25t^2, & t\in[0,2]\\ t-1, & t\in(2,9]\\ 8+(t-9)-0.25(t-9)^2, & t\in(9,11].\end{cases}$