几何学通论

秦元勋 著

JIHEXUETONGLUN

湖南科学技术出版社

几何学通论

秦元勋 著

湖南科学技术出版社

几 何 学 通 论

秦 元 勋 著

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1981年5月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：4.5　字数：95,000

印数：1——22,800

统一书号：13204·31　定价：0.40元

内 容 提 要

本书共分十章，从古代的几何学起，到现代的空时四元几何学止，均分章论述其发展简史，内容特点以及相互间的联系和区别。

全书通俗而严谨，可供初中以上程度读者阅读。

三版序言

这本书原在1949年1月写于香港。当时由于伟大的社会主义新中国即将诞生，港九文化界在1949年元旦集会上号召用写作向新中国献礼，作者恭逢盛会，用一周时间写成这本书，交三联书店出版。第一版序言如下：

“在新中国里，学术不再是为少数的人，也不再被少数人所独占；而要使专门的学术大众化，在目前是学术工作者的最主要的任务。数学既然是一切科学的基础，使它大众化的需要当然更为迫切。

数学的几个大部门中，几何学有着图形的帮助，最容易引起广大的读者的兴趣。这本小册子的目的便是想用极简单的话和很美丽的图形向读者介绍几何学。只要念过一年几何和代数的人都看得懂这本书，而且在第九章里，我把最近代的几何学——连续几何学介绍给所有读者，希望没有念过几何学的人也看得懂它的大意，更希望对几何学有兴趣的人替它开拓更宽广的，更伟大的园地。”

十年过去后，由于广大读者的需要，作了部分修订，1959年由商务印书馆出修订版，再版的自序中有这样一段话：

“伟大的十年过去了，我们伟大的祖国已经起了空前的变化，一日千里地向社会主义和共产主义跃进。生活在这个伟大的祖国怀抱中的人，对于建国十周年的盛大时节如何能不表现出更大的欢欣。”作者用这段话表达了修订时的激情。

三十年过去了。我们的党提出向四个现代化进军的伟大任

务，号召提高全民族的科学文化水平。许多同志都催促我再版这本书，趁此机会我改写了部分章节，特别是重写了第十章“空时四元几何学”，这是二十世纪科学最伟大的成就之一，必须普及给广大读者。

湖南科技出版社为我提供了出版机会，并作了许多编辑加工、缮写等方面的工作，为第三版的出版付出了很大的劳动，谨致谢意。

最后，对从第一版起就支持这一工作的冯敏同志，表示谢意。

秦元勋

1980年3月于北京

目　　录

三版序言 ……………………………………………………(Ⅰ)
第一章　古代的几何学 ……………………………………(1)
　Ⅰ　几何学的发源 ……………………………………(1)
　Ⅱ　希腊的几何学 ……………………………………(2)
　　1　毕达哥拉斯学派 ………………………………(3)
　　2　诡辩学派 ………………………………………(3)
　　3　初等几何作图三大难题 ………………………(4)
　　4　柏拉图学派 ……………………………………(5)
第二章　欧氏几何学 ………………………………………(6)
　Ⅰ　亚力山大大学城 …………………………………(6)
　Ⅱ　欧几里德的贡献 …………………………………(6)
　　1　几何学要义的体系 ……………………………(7)
　　2　定义 ……………………………………………(8)
　　3　公理、公设和定理 ……………………………(8)
　　4　欧氏作图法 ……………………………………(8)
　Ⅲ　圆锥截线 …………………………………………(9)
第三章　非欧几何学 ………………………………………(13)
　Ⅰ　非欧几何学小史 …………………………………(13)
　Ⅱ　三种几何学公设的异同 …………………………(14)
　　1　欧氏及罗氏的平行公设 ………………………(14)
　　2　黎氏公设 ………………………………………(15)
　Ⅲ　三种几何学的异同 ………………………………(15)

1 三种几何学中相同的定理 ……………………(16)
2 三种几何学中不同的定理 ……………………(16)
IV 三种几何学与真理的问题 ……………………(17)
第四章 解析几何学 ……………………(20)
I 解析几何学的基本概念 ……………………(20)
1 直线上的点与实数的对应 ……………………(20)
2 平面上的点与实数组的对应 ……………………(21)
3 直线与一次方程式 ……………………(22)
4 圆的方程式 ……………………(25)
5 初等几何学作图问题 ……………………(26)
6 二次曲线 ……………………(31)
II 坐标几何学 ……………………(32)
1 无限远直线 ……………………(33)
2 直线坐标 ……………………(34)
3 二阶曲线 ……………………(36)
III 虚元素 ……………………(38)
1 虚点与虚线 ……………………(38)
2 虚圆 ……………………(40)
第五章 射影几何学 ……………………(42)
I 射影几何学小史 ……………………(42)
II 对偶原理 ……………………(42)
III 透视图形 ……………………(47)
1 完全多点形与完全多线形 ……………………(47)
2 透视中心和透视轴 ……………………(48)
IV 透视和射影 ……………………(51)
1 点列和线束的透视关系 ……………………(51)
2 射影 ……………………(53)

V　巴斯卡定理与布良雄定理 ……………………(56)
VI　空间的射影 ……………………………………(59)
VII　仿射几何学 ……………………………………(61)
VIII　画法几何学 ……………………………………(61)
IX　非欧几何学 ……………………………………(62)
1　罗氏几何学 ……………………………………(62)
2　黎氏几何学 ……………………………………(65)
3　三种几何学的统一性 …………………………(67)
第六章　微分几何学 ……………………………(69)
I　微分几何学的对象 ……………………………(69)
II　曲线的几何学 …………………………………(69)
1　平面上的曲线…………………………………(69)
2　空间的曲线 ……………………………………(73)
III　曲面的几何学 …………………………………(74)
1　曲面上的距离与角 ……………………………(74)
2　高斯曲率 ………………………………………(76)
3　非欧几何学 ……………………………………(79)
第七章　几何学的基础 …………………………(81)
I　几何学的公理化 ………………………………(81)
II　公理系统 ………………………………………(82)
1　结合公理 ………………………………………(82)
2　次序公理 ………………………………………(83)
3　叠合公理 ………………………………………(85)
4　平行公理——欧氏公理 ………………………(87)
5　连续公理——德得金公理 ……………………(87)
6　公理的讨论 ……………………………………(87)
III　非欧几何学 ……………………………………(88)

IV 有限几何学 ……………………………………(89)
第八章 几何学的分类 ……………………………………(90)
I 群论观点下的几何学 ……………………………………(90)
II 刚体变换群 ……………………………………(90)
1 移动 ……………………………………(90)
2 转动 ……………………………………(92)
3 刚体变换 ……………………………………(93)
4 图形的不变性质 ……………………………………(94)
5 空间的刚体变换群 ……………………………………(95)
III 仿射变换群 ……………………………………(95)
IV 射影变换群 ……………………………………(96)
V 变换群 ……………………………………(97)
第九章 拓扑学（连续几何学） ……………………………………(99)
I 拓扑学简述 ……………………………………(99)
II 一维拓扑学 ……………………………………(99)
III 二维拓扑学 ……………………………………(101)
1 约当曲线 ……………………………………(101)
2 四色定理 ……………………………………(102)
IV 二维曲面的拓扑学 ……………………………………(104)
1 三角形分割 ……………………………………(105)
2 欧拉——庞卡莱数 ……………………………………(106)
3 单面曲面 ……………………………………(110)
4 二维闭曲面 ……………………………………(112)
V 拓扑学与微分几何学的联系 ……………………………………(114)
VI 三维拓扑学 ……………………………………(115)
VII 一对一的对应 ……………………………………(117)
VIII 一对一的连续变换群 ……………………………………(119)

IX 其他的问题……………………………………………………(119)

1 空间的维数 …………………………………………………(119)

2 路径问题 ……………………………………………………(120)

3 绳子问题 ……………………………………………………(120)

4 定点问题 ……………………………………………………(120)

第十章 空时四元几何学……………………………………(122)

I 空时观点的发展……………………………………………(122)

II 古典的空时观点……………………………………………(123)

1 我国古代的空时观点………………………………………(123)

2 伽利略的空时观点 ………………………………………(123)

III 爱因斯坦的狭义相对论的空时观点……………………(124)

1 光速不变实验导出时间相对性概念 ……………………(124)

2 空时距离及尺缩、钟慢 …………………………………(126)

3 洛伦兹变换 …………………………………………………(127)

IV 爱因斯坦的广义相对论的空时观点……………………(128)

1 物质的存在对空时结构的影响 …………………………(128)

2 变形空时结构中的物理效应 ……………………………(130)

V 简短的小结…………………………………………………(132)

第一章　古代的几何学

I　几何学的发源

我们伟大的祖国在历史上对世界文化和科学的各个方面都有重大的贡献。由于农业劳动的需要，我国古代人民已经有了简单的几何图形的概念，例如，从甲骨文中已经出现了“规”与“矩”这两个字，也出现了“田”字。在殷周两代遗下的青铜器上面的花纹，都是十分美丽而准确的几何图案。“墨子”一书中对于圆所下的定义比西方欧几里德的“几何学要义”一书所记的要早一百多年。由于天文、水利、建筑等的需要，我国古代的几何学得到很大发展。大约在公元前一世纪，我国的“周髀算经”和“九章算术”都记载了“勾股弦”定理，其中如商高所称的“勾三股四弦五”，其后刘徽利用这个定理创造了“割圆术”，由圆内接正六边形分割到圆内接九十六边形，求出$\pi=3.14$的近似值。这里已经有了逼近的概念。公元五世纪我国出了一位伟大的科学家——祖冲之，他算出圆周率π在3.1415926和3.1415927之间，这一贡献比西方奥托的结果约早一千年。在天文和大地测量方面，我国古代还出了张衡和一行等伟大的科学家。

在西方，相传几何学是在四千年以前发源于埃及。埃及的尼罗河两岸土地肥沃、农产丰富，因此埃及成为西方文化的发祥地。但是，尼罗河每年有定期的泛滥，水涨时两岸田地被淹

没，水退后，田地的界限被冲毁。为了解决土地的争执，测地学便随着这种需要而发生。

上述的这种传说是有一定的可靠性的，因为现在我们所用的“几何学”这一名词的原意便是由西方的“测地学”音译过来的。约在三千八百年前，一位埃及学者阿默斯手抄了一本书，在这本有名的阿默斯抄本中便有许多关于面积的测量计算法。其中也还有关于金字塔的几何问题，直到现在对于金字塔的几何形体的精确与完美，人们仍不能不叹服，但可惜这些巨大的建筑只是作为帝王的墓地，徒然劳民伤财。

四季的变化对于畜牧业和农业都有决定性的意义，天文学也应时而生。首先必须要测定东西南北方向，古代人很早就知道用北极星来定北方，要找东西方向，则需要作南北方向的垂线，古代人用“勾三股四弦五”的办法来确定直角，也就是用三条绳子，各长三、四、五个单位，将它们组成一个三角形，则五单位所对的角便是直角。这个定理的一般形式，出现在希腊的毕达哥拉斯学派的工作中。一般说来，古代埃及的几何学只是从实际问题中积累了感性知识，还有待总结和提升并抽象出普遍性的定理和建立严格的体系。

II 希腊的几何学

希腊的“七个聪明人”之一的泰勒斯到埃及去经商，很快他就掌握了埃及人已有的几何学知识，并把这些知识传回到希腊。那时几何学不但是一门时髦的学科，而且是一切学者的必修科。哲学家柏拉图便在门上写着：“不学几何学的人，请勿入此门”，因为几何学在当时被认为是训练人的思维方法和逻辑推理的最好的一门学科。希腊最伟大的几何学家是毕达哥拉斯。

1　毕达哥拉斯学派

毕达哥拉斯学派是一个组织非常严密的集团，他们将他们的成果保密起来。传说当他们发现了现在通称的“毕达哥拉斯定理”时，他们杀了一百头牛举行了盛大的祝贺大会。而当有一个人泄漏了这个秘密时，他们就将这个人溺死。这个有名的“毕达哥拉斯定理”是：

平面上一个直角三角形的直角的两夹边的平方之和等于直角所对的边的平方(图 1)

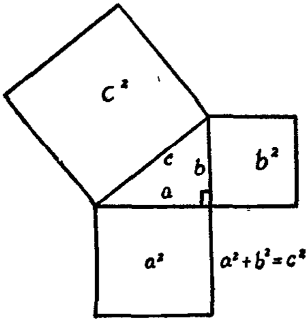

图 1

2　诡辩学派

与毕达哥拉斯学派同时的有著名的诡辩学派。这一派的领袖是辩证学家齐诺。最有名的诡辩例子是“追龟说”。希腊神话中有一个跑得最快的阿其里斯，但是齐诺断言，阿其里斯追不上一个比他跑得慢的乌龟。下面是齐诺的推理：

假设阿其里斯跑得比乌龟快十倍，他开始时在乌龟之后一丈远。当他跑完这一丈路时，这个乌龟前进了一尺。所以乌龟在阿其里斯前一尺。当他跑完这一尺路时，这个乌龟前进了一寸。所以乌龟在阿其里斯前一寸……如此下去，乌龟总在阿其里斯前面，永远追不上。

这里牵涉到阿其里斯和乌龟的速度是否固定的问题，速度固定后又有一个无限级数求和的问题。

诡辩学派研究的重要对象是几何学的作图难题。这些难题

中有曾经成为历史上著名问题而后来又都得到了彻底解决的所谓“三大难题”。

3 初等几何作图三大难题

希腊人留下的三大难题是：

（一）三等分任意一个已知角。

（二）二倍立方体，即作一个立方体使其体积等于一个已知立方体的体积的两倍。

（三）方圆，即作一个正方形使其面积等于一已知圆的面积。

历史上有不少学者为了这三个题目花了很多时间，直到十九世纪末才弄清楚了下面的结论：

如果作图的工具只限于圆规和无刻度的直尺，则这三个作图题都是不可能的（见第二章第II节4款和第四章第I节5款）。所谓不可能的准切意义和证明后面都将再谈到。

如果作图的工具不限于圆规和直尺，这三个问题都很容易解决。例如其中最困难的方圆问题，作一个圆柱，柱底为已给的圆，柱高为已给的圆的半径的一半，把这个圆柱在平面上滚一周，得到一个长方形（如图2）不难看出，这个长方形的一边是圆半径r的一半即$\frac{r}{2}$，另一边是圆周长即$2\pi r$，因此这个长方形的面积是

$$\frac{r}{2}\times 2\pi r=\pi r^2.$$

这就是圆面积。现在将长方形转化为正方形，作图法在每本初等几何书中都可以找到。问题也就解决了。由此可见，读者千万不要再去从事这种已经彻底解决了的问题的研究，否则既浪

费自己的宝贵时间，又给数学家增加完全无用的负担。

图 2

4　柏拉图学派

柏拉图对于几何学的贡献是在几何学的体系和基础方面。他开始把几何学建立在定义、公理及逻辑上面，使得几何学的基础比其他科学更稳固，论证更精密，体系更明确．但是他没有专心于几何学，所以著作不多，他的工作后来由欧几里德去完成。

柏拉图学派的研究偏重于立体几何学。这个学派的有名学者尤多苏。他证明了一个圆锥形的体积等于同高同底的圆柱形的体积的三分之一（图3)。他所用的方法叫耗尽法，实际上是积分法的粗型。

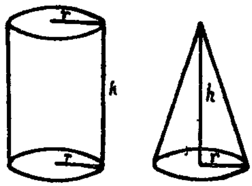

图 3

公元前338年，雅典被希腊北部的马其顿王斐力仆所征服。希腊文化从此中落，在希腊，几何学的发展也随着停滞．西方文化中心又移回到埃及去．在那里，初等几何学发展到了高峰．

第二章　欧氏几何学

I　亚力山大大学城

希腊被马其顿灭亡以后，其本土的文化因此中断。但斐力仆的儿子亚力山大大帝却把希腊文化向他的广大的征服区传播。他侵占埃及以后，便在尼罗河口建立了亚力山大城和亚力山大大学。这个大学继承了希腊文化的正宗，并向前发展了一千多年。这个大学早期出了几个著名的数学家和物理学家如阿基米德，阿波罗纽斯和欧几里德，晚期还出了巴布士。他们当中，以欧几里德对于几何学的贡献最大。

II　欧几里德的贡献

欧几里德为了教学的需要编成了一部“几何学要义”。这部书共分十五卷，第一、二、三、四、六卷都是关于平面几何的。第五卷是关于一般的比例图形。第七、八、九卷是关于算术方面的。第十卷是关于直线上的点。最后五卷则是关于立体几何的。这部书的材料虽然大部分是前人留下来的，证题方法也多沿用希腊人的，但欧几里德不仅增加了自己的工作，最主要的是建立了严格的几何的体系.他把以前不严格的证明重加论证，再经过一番非常精细的整理和排列。他整理出的这一套几何体系在几何学中占据了统治的地位达二千多年，那时欧几里德的名字可以说是几何学的同义语。只有到了十九世纪，才有其他