小学教师进修中等师范试用教材

辽、吉、黑、湘四省教材协编组编

算术基础理论

小学教师进修中等师范试用教材

算术基础理论

辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省教材协编组编

湖 南 教 育 出 版 社

小学教师进修中等师范试用教材

算术基础理论

辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省教材协编组编

湖南教育出版社出版
黑龙江人民出版社重印
黑龙江省新华书店发行
黑龙江新华印刷厂印刷

1983年7月第1版 1983年7月第1次印刷
字数：270,000 印张：13,25 印数：1—64,000

统一书号：7284·214　　定价：0.99元

说　明

这套试用教材是根据教育部颁发的《小学教师进修中等师范教学计划（试行草案）》的要求和函授教学的特点，以及业余面授和离职进修的需要而编写的。作为辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省小学教师进修中等师范课程的试用教材。

本册教材的内容有集合、整数、数的整除性、分数、小数和量的计量等六章。为了方便学员分散自学，本书的文字力求通俗，阐述力求详尽。为了帮助学员掌握和巩固所学知识，本书各节一般配有练习，各单元一般配有习题，各章一般配有复习题。为了适应学员的不同要求，还编写了一本《自学指导》。书中加有*号的部分，作为函授和业余面授的选学内容。

编写本书时，主要参考了全日制的中师数学课本。初稿写出后，经辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省小学教师进修中师教材编审会议讨论审定，安徽省的同志到会给予了热忱的帮助。在此表示感谢。

本书由郭涤尘同志主编，编者有刘齐平（一、二章）、傅世球（一、三章）、郭涤尘（三、四章）、李锋（五、六章）。

由于编写人员水平有限，加之时间短促，本书的缺点错误可能不少，敬希读者批评指正。

辽宁、吉林、黑龙江、湖南四省
小学教师进修中师教材协编组

一九八三年三月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　集合与对应

一　集　　合

1.1　集合的概念

1.　集合与元素

考察下面几组对象：

（1）某工具箱里的锤子，锯子，锉子；

（2）五甲班的所有学生；

（3）1，2，3，4，5，6，7；

（4）平面上到点O的距离等于5的所有的点；

（5）所有的三角形．

它们分别是由一些工具、一些人、一些数、一些点、一些图形组成的．

一组对象的全体就形成一个**集合**（有时也简称集）．集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**．

例如，（2）是由一个班的所有学生组成的集合，这个班的每一个学生都是这个集合的元素．

一个集合可以由有限个元素组成，这样的集合叫做**有限集合**．如上面的（1）、（2）、（3）这三个集合都是有限集

合．一个集合也可由无限个元素组成，这样的集合叫做**无限集合**．如上面的（4）、（5）这两个集合都是无限集合．

一个元素也可以组成集合，这样的集合叫做**单元素集**．例如，月亮组成的集合就是一个单元素集．为了方便起见，我们认为集合里也可以没有元素，没有元素的集合叫做**空集**．例如，当教室里的学生都离开教室以后，教室里的学生就组成空集．

对于一个给定的集合，集合中的元素应该是确定的．这就是说：任何一个对象，要么是这个集合的元素，要么不是它的元素．例如，对于上面的集合（5）来说，一切三角形都是它的元素，任何四边形、五边形、圆都不是它的元素．

对于一个给定的集合，集合中的元素应该是互异的．这就是说：集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象只能算作一个元素．因此，集合中的元素是没有重复现象的．

2、 集合的表示方法

表示集合的方法，常用的有图示法、列举法和描述法．

把集合的所有元素用一条封闭曲线圈起来表示一个集合的方法叫做**图示法**．这种方法比较直观，小学教材里常用这种方法表示集合．

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**列举法**．例如，由字母a、b、c、d组成的集合可以表示为

$$\{a, b, c, d\};$$

又如，前面的集合（3）可以表示为

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

用列举法表示集合时，可以不考虑元素的顺序．例如，由字母a、b、c、d组成的集合，还可以表示为$\{b, d, c, a\}$等等．

只由一个字母a组成的单元素集用列举法表示出来就是$\{a\}$，空集用列举法表示出来就是$\{\ \}$．

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**描述法**。例如，前面的集合（2）用描述法表示就是

{五甲班的学生}；

又如，前面的集合（5）用描述法表示就是

{三角形}．

在代数里，为了更精确地表示集合，往往采用这样的形式：在大括号内，先写上这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线（有的书上用冒号“：”或分号“；”代替竖线），然后在竖线的右边写上这个集合的元素的公共属性．例如，在实数范围内不等式$x-5>0$的解集（即由不等式$x-5>0$的所有的解组成的集合）可以表示为

$$\{x \mid x-5>0\};$$

在实数范围内方程$x^2-5x+6=0$的根的集合可以表示为

$$\{x \mid x^2-5x+6=0\}.$$

为了表示集合与元素的关系，我们通常用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示元素．如果a是集合A的元素，就记作$a\in A$，读作“a**属于**A”；如果a不是集合A的元素，就

记作$a\overline{\in}A$（或$a\tilde{\in}A$），读作“a不属于A”．例如，设A表示集合{1，2，3}，那么

$$3\in A,\quad 4\overline{\in}A.$$

在代数里，一些常用的数集各用一个字母表示：N表示自然数集，Z表示整数集（代数里的整数集就是一切正整数、一切负整数和零组成的集合），Q表示有理数集，R表示实数集．为了方便起见，还用Q^+表示正有理数集，用R^-表示负实数集，等等．

练 习

1 下列集合，哪些是有限集合或无限集合？哪些是空集或单元素集？

（1）△ABC的内切圆的集合；

（2）有外接圆的四边形的集合；

（3）有两个直角的三角形的集合；

（4）方程$x^2-9=0$的根的集合；

（5）不等式$x-9>0$的解的集合；

（6）小于3而大于5的数的集合；

（7）到三角形的各顶点距离相等的点的集合；

（8）全世界所有的生存着的人的集合．

2．把下列集合改成列举法表示：

（1）{比2大5的数}；

（2）{太阳系的九大行星}；

（3）{一只手的手指}；

（4）$\{x \mid x^2+1=0\}$。

3. 用描述法表示下列集合：

（1）{长江，黄河}；　　（2）{北京}；

（3）方程$x^2-1=0$的根的集合；

（4）所有直角三角形的集合。

4. 用符号∈或∉填空：

（1）a__$\{a\}$；（2）0__{ }；（3）0__{0}；

（4）$\sqrt{3}$__Q；（5）$\sqrt{5}$__R；

（6）3.1416__{无理数}。

1.2　集合的包含与相等

观察下面三个集合，并考察它们之间的关系：

（1）$\{a, b, c, d\}$；（2）$\{a, b\}$；

（3）$\{a, b\}$.

先看（1）与（2）. 显然，集合（2）的任何一个元素都是集合（1）的元素，但集合（1）中还有不属于集合（2）的元素. 集合（1）与（3）也有同样的关系.

再看（2）与（3）. 显然，集合（2）的任何一个元素都是集合（3）的元素；反之集合（3）的任何一个元素也都是集合（2）的元素.

由此可以得到下列定义：

定义　对于两个集合B与A，如果集合B的任何一个元素都是集合A的元素，那么集合B叫做集合A的**子集**，集合A叫做集合B的**扩集**，记作

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$B \subseteq A \ (\text{或} A \supseteq B),$$

读作"B**包含于**A"（或"A**包含**B"）.

例如，就上面三个集合来说，我们有：

$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$,

$\{a, b, c, d\} \supseteq \{a, b\}$;

$\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$, $\{a, b\} \supseteq \{a, b\}$.

当B不是A的子集时，可以记作

$$B \nsubseteq A \ (\text{或} A \nsupseteq B),$$

读作"B**不包含于**A"（或"A**不包含**B"）.

对于任何一个集合A，因为它的任何一个元素都属于集合A本身，所以

$$A \subseteq A,$$

也就是说，**任何一个集合是它本身的子集**.

为了方便起见，我们把空集记作$\varnothing$. 并且规定：**空集是任何集合的子集**. 也就是说，对于任何集合A，总有

$$\varnothing \subseteq A.$$

定义 如果B是A的子集，并且A中至少有一个元素不属于B，那么集合B叫做集合A的**真子集**，而集合A叫做集合B的**真扩集**，记作

$$B \subset A \ (\text{或} A \supset B).$$

当B不是A的真子集时，可以记作

$$B \not\subset A \ (\text{或} A \not\supset B).$$

例如，就前面三个集合来说，我们有：

$\{a,b\} \subset \{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,d\} \supset \{a,b\}$;

$\{a,b\not\subset\}\{a,b\}$,

$\{a,b\}\not\supset\{a,b\}$.

集合A与它的真子集B之间的关系，可用图1—1来说明，其中A、B两个圈（包括内部）分别表示集合A、B.

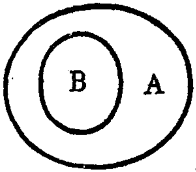

图1—1

由子集与真子集的定义可知，真子集是子集，但子集不一定是真子集．例如，任何一个集合是它本身的子集，但我们不能说：任何一个集合是它本身的真子集.

显然，空集是任何非空集合的真子集.

定义 对于两个集合A与B，如果$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，那么就说集合A与集合B**相等**，记作

$$A=B,$$

读作“A**等于**B”.

例如，就前面三个集合来说，我们有：

$$\{a,b\}=\{a,b\}.$$

由集合相等的定义可知：如果$A=B$，那么集合A的元素与集合B的元素完全相同．这时，集合A与集合B的关系可用图1—2表示．其中A、B两个圈完全重合.

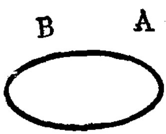

图1—2

显然，对任何一个集合A来说，总有

$$A=A.$$

容易证明，集合的包含与相等关系，有下列性质：

①如果$A \subseteq B$，$B \subseteq C$，那么$A \subseteq C$；

②如果$A \subset B$，$B \subset C$，那么$A \subset C$；

③如果$A = B$，$B = C$，那么$A = C$.

下面我们来证明①，②与③的证明留给读者.

证明：设x是集合A的任一元素，即$x \in A$.

$\because \quad A \subseteq B, \quad \therefore \quad x \in B,$

又$\because \quad B \subseteq C, \quad \therefore \quad x \in C,$

由子集的定义可得　$A \subseteq C$.

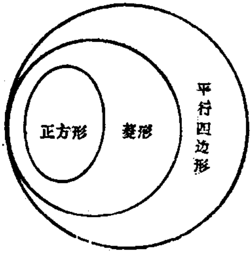

图1—3

下面的例子可以说明性质②（图1—3）.

$\because$ {正方形}⊂{菱形}，

{菱形}⊂{平行四边形}，

$\therefore$ {正方形}⊂{平行四边形}.

例1　写出集合{a，b，c}的所有子集及真子集.

解：集合{a，b，c}的所有子集及真子集如下.

子集：$\varnothing$，{a}，{b}，{c}，{a，b}，{a，c}，{b，c}，{a，b，c}；

真子集：$\varnothing$，{a}，{b}，{c}，{a，b}，{a，c}，{b，c}.

例2　写出方程$x^2-7x+12=0$的解集并进行化简.

解：方程$x^2-7x+12=0$的解集是

$$\{x \mid x^2-7x+12=0\} = \{3, 4\}.$$

练　习

1. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，丰，$\subset$，$=$）填空：

　（1）$\varnothing$____$\{\quad\}$；　　（2）0____$\varnothing$；

　（3）$\varnothing$____$\{0\}$；　　（4）a____$\{a\}$；

　（5）$\angle A(=180^\circ)$____{钝角}；

　（6）{等边三角形}____{锐角三角形}；

　（7）{梯形}____{平行四边形}；

　（8）$\{x \mid |x|=1\}$____$\{x \mid x^2-1=0\}$。

2. 求证：如果$A\subset B$，$B\subset C$，那么$A\subset C$。

1.3　并集与交集

1.　并集

观察下面三个集合：

$A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d\}$，$C=\{a,b,c,d\}$。

容易看出，集合C是由所有属于A或属于B的元素组成的。

定义　由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，叫做A与B的**并集**，记作

$$A\cup B,$$

读作“A并B”.求两个集合的并集的运算叫做**并**。

这个定义可以简单地写成

$$A\cup B=\{x \mid x\in A或x\in B\}.$$

例如，对于上面的三个集合A、B、C而言，我们有

$$A\cup B=C.$$

集合C可用图1—4中的阴影部分表示．由于集合A与集合B有公共元素，所以图中A、B两个圈有重迭部分．

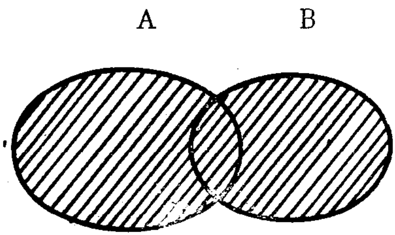

图1—4

又如，设A＝{锐角三角形}，B＝{钝角三角形}，那么 $A\cup B$＝{锐角三角形}$\cup${钝角三角形}

＝{锐角三角形或钝角三角形}

＝{斜三角形}．

这时，$A\cup B$可用图1—5中的阴影部分表示．由于集合A与集合B没有公共元素，所以图中A、B两个圈没有重迭部分．

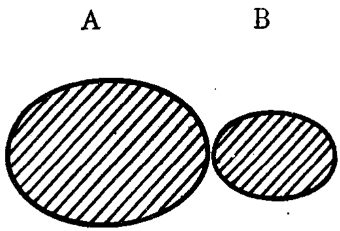

图1—5

再如，设$A=\{$长方形$\}$，

$B=\{$正方形$\}$，那么

$A\cup B=\{$长方形$\}\cup\{$正方形$\}$

$=\{$长方形$\}$.

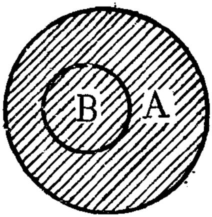

图1—6

这时，$A\cup B$可用图1—6中的阴影部分表示．由于集合A包含集合B，所以B圈要画在A圈的内部．

由并集的定义容易知道：对于任何集合A、B，总有

$$\mathbf{A}\cup\mathbf{A}=\mathbf{A},\quad \mathbf{A}\cup\varnothing=\mathbf{A};$$

还有 $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{A}\cup\mathbf{B},\quad \mathbf{B}\subseteq\mathbf{A}\cup\mathbf{B}.$

例 3 求证：**如果$\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$，那么$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{B}$.**

分析：由集合相等的定义可知，要证$A\cup B=B$，必须证明$A\cup B\subseteq B$且$B\subseteq A\cup B$.

证明：设x是集合$A\cup B$的任一元素．

$\because\ x\in A\cup B,\ \therefore\ x\in A$或$x\in B$.

当$x\in A$时，

$\because\ A\subseteq B,\quad \therefore\ x\in B,$

由子集的定义得 $A\cup B\subseteq B$;

当$x\in B$时，显然有 $A\cup B\subseteq B$.

又设y是集合B的任一元素，由并集的定义可知：

$y\in A\cup B$，从而$B\subseteq A\cup B$.

$\because\ A\cup B\subseteq B$且$B\subseteq A\cup B$，$\therefore\ A\cup B=B$.

例 4 求证：

$$\{x\mid(x-n)(x-m)=0\}=\{x\mid x-n=0\}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com