陕西省卫星电视教育·小学教师培训教材

《代数与初等函数》教学辅导

陕西省小学教师培训中心
卫星电视函授部

陕西人民出版社

陕西省卫星电视教育·小学教师培训教材

《代数与初等函数》教学辅导

陈俊斌　金　涛　王凯成
李春贵　叶辉春　吕恩才　编写
孙智斌

陕西人民出版社

陕西省卫星电视教育·小学教师培训教材

《代数与初等函数》教学辅导

陈俊斌　金　涛　王凯成
李春贵　叶辉春　吕恩才　编写
孙智斌

陕 西 人 民 教 育 出 版 社 出 版 发 行

(西安北大街131号)

国营五二三厂印刷

787×1092毫米　32开本　4.25印张　87千字

1990年11月第1版　　1990年11月第1次印刷

印数：1—10000

ISBN 7-224-01385-4/G·335

定价：1.75元

前　言

陕西省卫星电视函授中师教育教学辅导丛书，是应我省广大学员和辅导教师的要求，由陕西省小学教师培训中心卫星电视函授部组织编写的。本着与统编教材配套的原则，《教学辅导》分编为9册。其中《代数与初等函数》、《文选和写作》、《教育学心理学基础知识问答》1990年11月初出版发行，其余各册将陆续出版。

本书是陕西省卫星电视教育小学教师培训教材《代数与初等函数》教学辅导。为了帮助学员掌握教材的主要内容和教学要求，按统编教材的顺序编为十二章，每章包括主要内容、教学要求、例题解析、测试练习四部分，书末附有各章测试练习的答案与提示。由于《教学辅导》是和统编教材相配套的，因此学员应在收看卫星电视教育节目的基础上认真学习统编教材，再进一步学习《教学辅导》，使知识系统化、条理化，并逐步把知识转化为能力。

由于我们的编写水平有限，时间仓促，书中难免有缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

编　者

1990年3月

目　　录

第一章　集　　合

（一）主要内容

1．集合的概念。

2．集合的表示方法。

3．子集、交集、并集、全集和补集。

（二）教学要求

1．了解集合的概念。

2．掌握集合的表示方法。

3．会用集合和集合的有关概念解一些简单问题。

（三）例题解析

例1：用列举法表示比10小的质数的集合。

解：$\{2, 3, 5, 7\}$。

例2：用描述法表示小于5的自然数的集合。

解：{小于5的自然数}或$\{x \mid x<5,\ x\in N\}$。

例3：写出集合$\{a, b, c\}$的所有的子集。

解：ϕ，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$。

注：空集ϕ与这个集合的本身都是这个集合的子集。

例4：已知$A=\{6$的约数$\}$，$B=\{15$的约数$\}$，求$A\cap B$。

解：$\because$　$A=\{6$的约数$\}=\{1, 2, 3, 6\}$，

$B=\{15$的约数$\}=\{1, 3, 5, 15\}$，

∴ $A\cap B=\{6和15的公约数\}=\{1, 3\}$.

注：$A\cap B$ 中的元素就是6和15的公约数。

例5：若 $C=\{能被3整除的数\}$，$D=\{能被5整除的数\}$，求 $C\cap D$。

解：$C\cap D=\{既能被3整除又能被5整除的数\}$

$=\{能被15整除的数\}$。

注：$C\cap D$ 中的元素就是3与5的公倍数。

例6：设 $E=\{培训班的男学员\}$，$F=\{培训班的女学员\}$，求 $E\cap F$。

解：$E\cap F=\phi$。

注：因为 E、F 没有公共元素，所以它们的交集是空集 ϕ。

例7：若 $C=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$，$D=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$，求 $C\cup D$，并在数轴上表示出来。

解：$C\cup D=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}\cup\{x\mid 1\leqslant x<3\}$

$=\{x\mid -1<x<3\}$。

在数轴上表示如下图：

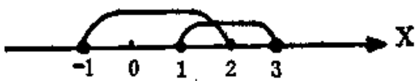

图1-1

注：求两个不等式解集的并集，可先在数轴上分别表示出这两个不等式的解集，其并集从数轴上看，是把两个解集区间合起来所成的区间。

例8：设 $S=\{直角三角形\}$，$H=\{斜三角形\}$，求 $S\cup H$。

解：$S\cup H=\{直角三角形\}\cup\{斜三角形\}$

$=\{三角形\}$。

例 9：已知 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 3, 4\}$。求 $A\cup B$、$A\cap B$。

解：$A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$，$A\cap B=\{2, 3\}$。

注：在 A 与 B 的并集中，相同元素只能取一次。

例 10：设 $I=R=$\{实数\}，$A=Q=$\{有理数\}，$B=$\{负数\}，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cup I$，$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$。

解：$\overline{A}=$\{无理数\}，

$\overline{B}=$\{零与正数\}或\{非负数\}，

$\overline{A}\cup I=I=$\{实数\}，

$A\cap\overline{B}=$\{零与正有理数\}或\{非负有理数\}，

$\overline{A}\cap\overline{B}=$\{正无理数\}。

测 试 练 习

1．判断下列各式是否正确？为什么？

(1) $0\in\{x\,|\,x<5,\ x\in N\}$；　　(　　)

(2) $\phi\notin\{x\,|\,x\leqslant 1,\ x\in R\}$；　　(　　)

(3) $\{1, 3, 5, 7\}\supseteq$\{奇数\}；　　(　　)

(4) $\{a, b, c\}=\{c, a, b\}$；　　(　　)

(5) $\{x\,|\,x+1=0\}\subseteq\{x\,|\,x^2=1\}$。　　(　　)

2．填空：

(1) 集合 $M=$\{20 以内质数\}的所有元素是____；

(2) 用列举法表示 $S=$\{10 以内合数\}$=$________；

(3) 用描述法表示 $H=\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}=$________；

(4) 设 $A=$\{正三角形\}，$B=$\{等腰三角形\}，则 $A\cup B=$____。

3. 选择题：

(1) 如果 $M=\{1, 2, 3\}$，那么（ ）是 M 的子集。

(A) $\{x \mid x^2=5x-6\}$； (B) $\{x \mid 1<x\leqslant 3\}$；

(C) $\{10$ 的约数$\}$；

(D) $\left\{(x, y) \middle| \begin{cases} y=3-x \\ 3x-2y=4 \end{cases}\right\}$。

(2) 已知 $E=\{1, 2\}$，那么与集合 E 相等的集合是（ ）。

(A) $\{x \mid x^2-3x-2=0\}$； (B) $\{x \mid x^2-3x+2=0\}$；

(C) $\{x \mid x^2+3x-2=0\}$； (D) $\{x \mid x^2+3x+2=0\}$。

(3) 设 $S=\{x \mid x+1>0\}$，$H=\{x \mid 1-x>0\}$，则 $S\cap H$ 是（ ）。

(A) $\{x \mid x>-1\}$； (B) $\{x \mid x<1\}$；

(C) $\{x \mid -1<x<1\}$； (D) $\{x \mid x>-1$ 或 $x<1\}$。

(4) 若 $M=\{6$ 的约数$\}$，$I=\{12$ 的约数$\}$，则 $\overline{M}$ 应是（ ）。

(A) $\{4\}$； (B) $\{4, 6, 12\}$；

(C) $\{12\}$； (D) $\{4, 12\}$。

4. (1) 设 $I=Z$，$A=\{x \mid x=2k, k\in Z\}$，$B=\{x \mid x=2k+1, k\in Z\}$。求 $\overline{A}$、$\overline{B}$。

(2) 已知 $C=\{x \mid x\leqslant 3\}$，$D=\{x \mid x\leqslant 1\}$，求 $C\cap D$，$C\cup D$。

5. 设全集 $I=R$，$A=\{x \mid x\leqslant 6\}$，求：

(1) $A\cap I$，$A\cup I$； (2) $A\cap\overline{A}$，$A\cup\overline{A}$。

6. 设全集 $I=\{x \mid x\leqslant 10, x\in N\}$，$A=\{1, 2, 4, 5, 9\}$，$B=\{4, 6, 7, 8, 10\}$。求 $\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cap B}$，$\overline{A\cup B}$。

第二章　函　　数

（一）主要内容

1．函数和反函数的概念．

2．函数的单调性和奇偶性．

3．二次函数．

4．一元二次不等式．

（二）教学要求

1．理解函数与反函数的概念，掌握求函数定义域和求反函数的方法，明确互为反函数的函数图象之间的关系．

2．切实理解函数的单调性和奇偶性的概念，能够证明、判断一些简单函数的单调性和奇偶性，掌握奇、偶函数图象的特征．

3．能正确使用配方法把 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）变形为 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，并能画出 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象．

4．能熟练地确定抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的顶点、对称轴、开口方向，并能根据有关性质求二次函数的最大值与最小值．

5．在掌握一元一次不等式组与绝对值不等式的解法及其解集的表示法的基础上，结合二次函数的图象能够熟练地解一元二次不等式．

（三）例题解析

例 1：已知函数 $f(x)=|x|, y(x)=\begin{cases} x & x\in[0,+\infty) \\ -x & x\in(-\infty,0) \end{cases}$，

这两个函数是否表示同一个函数？为什么？

解：因为函数 $f(x)$ 的定义域是 R，函数 $y(x)$ 的定义域也是 R，且它们的对应法则一致。所以 $f(x)$ 与 $y(x)$ 是表示同一个函数。

例 2：已知函数 $f(x)=x^3+1$，求 $f(x^2)$，$[f(x)]^2$。

解：$f(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1$，

$[f(x)]^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1$。

例 3：求函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x+3)\sqrt{6-5x-x^2}}$ 的定义域。

解：这是一个无理分式函数，并且偶次根式在分母上，所以被开式 $6-5x-x^2>0$，且因式 $x+3\neq0$。于是解不等式组

$$\begin{cases} 6-5x-x^2>0 \\ x+3\neq0 \end{cases}$$

得 $-6<x<-3$ 或 $-3<x<1$。

所以，函数的定义域是 $(-6,\ -3)\cup(-3,\ 1)$。

例 4：求函数 $y=\dfrac{3x-1}{3x-2}$ 的值域。

解：由原函数中解得 $x=\dfrac{2y-1}{3(y-1)}$。

要使 x 有意义，必须使 $3(y-1)\neq0$，即 $y\neq1$，

所以函数的值域是 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$。

注：求函数的值域，有时可以求反函数的定义域。

例5：已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象经过(1, 6)、(3, 16)、(−3, −2)三点。

(1) 求出这个函数的表达式；

(2) 用配方法求出函数图象的顶点坐标、对称轴方程；

(3) 求出函数图象与两轴交点的坐标；

(4) 讨论这个函数递增或递减的性质。

解：(1) 依题意得$\begin{cases} a+b+c=6 \\ 9a+3b+c=16 \\ 9a-3b+c=-2. \end{cases}$

解得$a=\frac{1}{2}$，$b=3$，$c=\frac{5}{2}$.

所以，所求的函数表达式为$y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$.

(2) 配方得：
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x^2+6x+5) \\ &= \frac{1}{2}[(x+3)^2-4] \\ &= \frac{1}{2}(x+3)^2-2. \end{aligned}$$

所以函数图象的顶点坐标是(−3, −2)，对称轴方程是$x=-3$。

(3) 在$y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$中，设$x=0$，得$y=\frac{5}{2}$.

即抛物线与y轴交点为$\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

设$y=0$，由$\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}=0$解得

$x_1=-1,\quad x_2=-5$。

即抛物线与 x 轴交点为（$-1,0$），（$-5,0$）

（4）当 $x\in(-\infty,\ -3)$ 时，y 是减函数。

当 $x\in(-3,\ +\infty)$ 时，y 是增函数。

例6：设一个二次函数，其图象顶点是（1，2），在 y 轴上的截距是 5，求此二次函数。

解法一：设所求的二次函数为 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$。因为抛物线的顶点是（1，2），且经过点（0，5）。所以可

$$得方程组\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=2\\ c=5\end{cases}。\quad 解得\begin{cases}a=3\\ b=-6\\ c=5\end{cases}。$$

因此所求的二次函数为 $y=3x^2-6x+5$。

解法二：设所求的二次函数为 $y=a(x-k)^2+h$，这里 $k=1$，$h=2$。即所求的二次函数为 $y=a(x-1)^2+2$。又抛物线经过（0，5），因此有

$$5=a(0-1)^2+2。$$

解得：$a=3$

故所求的二次函数为 $y=3(x-1)^2+2=3x^2-6x+5$。

注：从例 6 可以看出，用解法一确定它的解析式时，计算比较繁琐．已知抛物线的顶点和另一条件，在求其解析式时，采用解法二计算比较简便．

例7：有一根长为 60cm 的铁丝，把它弯成一个矩形，怎样弯法才能使矩形面积最大？

解：设矩形的长为 $x$cm，则宽为（$30-x$)cm，于是矩

形的面积

$$s=x(30-x)=-x^2+30x$$
$$=-(x^2-30x+15^2)+15^2$$
$$=-(x-15)^2+225.$$

这是一个关于 x 的二次函数.

因为 $a=-1<0$，所以 s 有最大值.

当 $x=15$(cm)时，$s=225(\text{cm})^2$，为最大值.

又当 $x=15$(cm) 时，$30-x=30-15=15$(cm)，故将铁丝弯成长、宽都是 15cm 的正方形时，正方形的面积最大，最大面积是 225cm^2.

例 8：m 是什么实数时，方程 $x^2-(m+2)x+4=0$ 有实数根?

解：方程的判别式

$$\Delta=[-(m+2)]^2-4\times1\times4=m^2+4m-12.$$

我们知道，当 $\Delta\geqslant0$ 时，原方程有实数根.

由 $m^2+4m-12\geqslant0$，得 $m\leqslant-6$ 或 $m\geqslant2$.

所以，当 $m\leqslant6$ 或 $m\geqslant2$ 时，原方程有实数根.

例 9：求证：函数 $f(x)=4x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是增函数.

证明：设 x_1、x_2 是 $(-\infty,+\infty)$ 内任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)=4x_1+1,\qquad f(x_2)=4x_2+1,$$
$$f(x_2)-f(x_1)=(4x_2+1)-(4x_1+1)$$
$$=4(x_2-x_1)$$

$\because\ x_2>x_1$，$x_2-x_1>0$

$\therefore\ f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$

因此函数 $f(x)=4x+1$ 在（$-\infty$，$+\infty$）内是增函数。

例10：求证：$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$在$(0,\ +\infty)$内是减函数。

证明：设 x_1、x_2 是（0，$+\infty$）内任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1^2},\qquad f(x_2)=\frac{1}{x_2^2}.$$

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(\frac{1}{x_2}\right)^2-\left(\frac{1}{x_1}\right)^2=\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1x_2)^2}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{(x_1x_2)^2}$$

$\because\ x_1>0,\ x_2>0,\ \therefore\ x_1+x_2>0,\ (x_1x_2)^2>0.$

又 $x_1<x_2$，$x_1-x_2<0$，$\therefore\ \dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{(x_1x_2)^2}<0$

于是 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$。

所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$在（0，$+\infty$）内是减函数。

例11：判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$；（2）$f(x)=1+x^2$；

（3）$f(x)=x^2-x+1$；（4）$f(x)=-x^3$。

解（1）$\because\ f(-x)=(-x)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}$

$$=-x^{\frac{1}{3}}=-f(x),$$

$\therefore\ f(x)=x^{\frac{1}{3}}$是奇函数。

解（2）$\because\ f(-x)=1+(-x)^2=1+x^2=f(x)$，

$\therefore\ f(x)=1+x^2$ 是偶函数。

解 (3) $\because\ f(-x)=(-x)^2-(-x)+1=x^2+x+1$，

而 $x^2+x+1\neq f(x)$，$x^2+x+1\neq -f(x)$。

$\therefore\ f(x)=x^2+x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数。

解 (4) $\because\ f(-x)=-(-x)^3=-(-x^3)=-f(x)$，

$\therefore\ f(x)=-x^3$ 是奇函数。

例 12：已知函数 $y=f(x)$，求它的反函数 $y=f^{-1}(x)$。

(1) $y=\sqrt{2x+1}+2\quad\left(x\geqslant-\dfrac{1}{2}\right)$；

(2) $y=(\sqrt{3})^x\quad(x\in R)$。

解：(1) 由 $y=\sqrt{2x+1}+2\quad\left(x\geqslant-\dfrac{1}{2}\right)$ 可得

$$y-2=\sqrt{2x+1},$$

两边平方后，解得：

$$x=\frac{1}{2}y^2-2y+\frac{3}{2}.$$

$\therefore\ y=\sqrt{2x+1}+2\left(x\geqslant-\dfrac{1}{2}\right)$ 的反函数是

$$y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\ (x\geqslant 2).$$

解 (2) 由 $y=(\sqrt{3})^x$ $(x\in R)$ 解得 $x=\log_{\sqrt{3}}y$，

$\therefore\ y=(\sqrt{3})^x\quad(x\in R)$ 的反函数是

$y=\log_{\sqrt{3}}x$ $(x>0)$。

测 试 练 习

1．填空：