数学物理方法解题指导

周绍森　钱怀锦
龚仁山　李津水　编

江西高校出版社

数学物理方法
解　题　指　导

周绍森　钱怀锦
龚仁山　李津水　编著

江西高校出版社

(赣)新登字第 007 号

书　名：数学物理方法解题指导
出　版
发　行：江西高校出版社(南昌市洪都北大道 16 号)
经　销：各地新华书店
印　刷：南昌市印刷十一厂
排　版：华东地院南昌震旦公司激光照排部
开　本：850×1168　1/32
印　张：17.25
字　数：440 千
印　数：1—1000 册
版　次：1993 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
定　价：9.80 元
ISBN7—81033—258—9/G·93

邮政编码：330046　电话：331257、332093
(江西高校版图书凡属印刷、装订错误，请随时向承印厂调换)

修订版前言

“数学物理方法”是高等院校许多专业的重要课程。1984 年我们编写了《数学物理方法解题指导》这本书，期望它能给理科、工科、师范等各种类型高等院校的学生在学习这门课程及相近课程时以指导；同时还期望它能给予科技工作者和一切有志于攀登数学物理或工程技术理论高峰的人们以帮助。这本书的出版，得到中科院数学物理研究所副所长郭友中研究员的热情支持，亲自为之作序，也得到许多同行、读者的关心、厚爱，我们表示衷心的感谢。

为了更贴近当前各类高等院校“数学物理方法”课程的教学实际，照顾到相近专业以及企望进一步深造的各类读者的需要，我们在原书的基础上进行了修订、改编。保留原书四篇十九章的整体结构，在使内容更趋精炼的同时，增补了不少原书尚显欠缺的内容。在体例上，每章由原书的四部分调整为三部分，即：一、重要概念和关系式；二、解题指导；三、习题。第一部分是对基础知识的扼要概括。为了防止出现知识的简单堆砌的格局，编写时有意渗进了一些简单的演绎推论，使知识点呈现出层次性，这无疑有助于读者的理解和记忆。第二部分则从解题角度对基础知识的内涵和外延进行了必要分析，以求培养和提高读者分析问题和解决问题的能力；典型例题的求解亦重视各种解题方法的比较和鉴别，引导读者进行积极的富有探索性和创造性的思维。

修订版书稿，除原编者周绍森、钱怀锦继续参加工作外，龚仁山同志一道参加了编写。

我们深感水平有限，书中难免还有缺点、错误和欠妥之处，祈请读者批评、批正。

编者

1993 年春

序

认识世界的重要途径是对事物进行质和量的考察。量变到质变是事物发展的普遍规律。研究数量关系和空间形式都需要数学，因而数学广泛地向其它学科渗透，不断显现它的重要性。

数字进行渗透的头等重要的一步，是应用数学王国的语言来描述研究对象的一般规律，建立数学模型，对现象进行系统的分析和综合，对对象进行铨释和预测。这些模型有明确的目的、生动的物理内容和富于启迪的直觉形式。接着要研究的是数学模型解的存在性、唯一性、正则性、稳定性、能观控性等等，并从中提炼新的概念、新的问题和新的方法，对数学理论作出贡献和储备。这样一个解决问题的过程，完成了应用数学和纯粹数学的一次循环。

这些数学模型，无论是确定性的还是非确定性的，具体的还是抽象的，用微分方程还是用其它方法描述的，都是数理科学研究的范围。数理科学（广义的数学物理）是数学与科学技术之间的边缘学科。狭义的数学物理是指数理科学中，利用现代数学方法解决物理与工程技术问题的部分。显然，数理科学与四化建设密切相关，是数学能转化为生产力的最直接的部分。

"数学物理方法"则是讲述数学物理中比较成熟和定型部分的方法，是学习数理科学的非常重要的一种训练。它不仅是攻读理论物理的必不可少的阶梯，而且是学习许多工程技术课程的基础。因此，各理、工、师范等院校的许多专业，都把它作为一门重要的基础课程；一切想自学成才的人，也都视它为进一步学好其它理论的必要桥梁。随着我国高等教育事业的迅速发展和加速实现四个现代化建设的需要，这门课程的重要性就更加突出了。

顾名思义，"数学物理方法"不仅要求对物理基本概念和规律有正确的理解，而且要求对数学理论和技巧能灵活地应用，而这两者又

集中体现在解题上。但是，要把具体的问题抽象为数学问题，并进一步应用数学手段加以正确的解答，对许多人来说都不是一件轻松的事情，因而迫切希望有一本带有启发性和实用性的解题指导书。而目前国内又苦无成书。为此，编者们满怀热情地编写了这本内容丰富的参考书，这无疑是非常有意义的。

编者基本上遵循了教育部审定的“数学物理方法”教学大纲，广泛地参考了理工科和师范院校讲授这门课程的各类教材，以及国外有关的教材和资料。他们根据这门学科的自身规律，既吸收了别人的长处，又结合了自己的丰富教学经验；既重视基础理论，基本知识；又强调基本技能的训练，把立足点放在培养读者分析问题和解决问题的能力上，力求体现科学性、现代性和启发性，做到由浅入深，循序渐进，便于自学。

总之，这本书的内容全面，方法多样，题目新颖，思路清晰，是一本学习“数学物理方法”的很好的参考书，序者愿意把它推荐给有志于此的读者们。

中国科学院数学物理研究所

郭友中

1983 年 3 月 15 日

目 录

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数

一、重要的概念和关系式

1. 复数的表示及其运算

(1)复数的三种表示：

代数式：$z = x + iy$　(1 − 1)

三角式：$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$　(1 − 2)

指数式：$z = \rho e^{i\varphi}$　(1 − 3)

转换关系为：$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$，　$\varphi = \mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})$

z 的共轭复数 $\bar{z}$ 可表示为：　$\bar{z} = x - iy = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-i\varphi}$。

(2)实部、虚部、模和辐角：对 $z=x+iy$，有

实部：　$\mathrm{Re}z = x$

虚部：　$\mathrm{Im}z = y$

模：　$\mathrm{mod}(z) = |z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

辐角：　$\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})$

由于 $\mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})$ 的多值性导致 $\mathrm{Arg}(z)$的多值性。通常取主值，记作 $\arg(z)$，其取值范围为

$$-\pi < \arg(z) \leqslant \pi$$

$\therefore \quad \mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2ik\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$

(3)复数的运算：复数可看成实部单位为1，虚部单位为i，且$i^2=-1$的两元实数组，因此可沿用实数的运算法则。复数的加减可用代数式表示为

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \qquad (1-4)$$

复数的乘除及乘方、开方可采用指数式表示为

$$z_1^m z_2^n = \rho_1^m \rho_2^n e^{i(m\varphi_1 + n\varphi_2)} \qquad (m、n\text{ 为实数}) \qquad (1-5)$$

由于辐角的多值性，导致根式运算的多值性。例如，设m为正整数，则有

$$\sqrt[m]{z} = z^{1/m} = \rho^{1/m} e^{i\mathrm{Arg}(z)/m} = \sqrt[m]{\rho}\, e^{i\psi} \qquad (1-6)$$

显然

$$\psi = \frac{\arg(z)}{m} + 2i\frac{k}{m}\pi \qquad (k = 0,1,2,\cdots,m-1) \ (1-7)$$

这里 $\psi \equiv \mathrm{Arg}(\sqrt[m]{z})$

(4)复平面：与$z=x+iy$相对应的XOY平面称为复平面，复平面上任一点的坐标(x,y)给出一个复数$z=x+iy$。

与二维平面不同的是：复平面上只有一个点对应于无穷远点。这在复变函数的理论中至关重要。

2. **复变函数**

以复变数为自变量的函数称为复变函数。

(1)整式、分式、根式函数：由相应的实函数直接得到

整式函数：$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$ （m为正整数）

分式函数：$f(z) = \dfrac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n}$

（m,n为正整数，且$n \geqslant m$）

根式函数：$f(z) = \sqrt[n]{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m}$

（m,n为正整数，且$n \geqslant m$）

以上各式中的$a_i,b_i(i=0,1,\cdots)$为复常数。通常，n次的根式函数

是 n 值的。

(2)指数函数：e^z 可由下式定义

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (1-8)$$

该定义式等价于

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

(3)三角函数：利用指数函数定义

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad (1-9)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \qquad (1-10)$$

$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \qquad (1-11)$$

$$\mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \qquad (1-12)$$

这样定义的三角函数保持基本三角恒等式不变。

(4)双曲函数：用指数函数定义

$$\mathrm{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \qquad (1-13)$$

$$\mathrm{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \qquad (1-14)$$

$$\mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad (1-15)$$

$$\mathrm{cth} z = \frac{\mathrm{ch} z}{\mathrm{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \qquad (1-16)$$

这样定义的双曲函数可用三角函数表示为

$$\mathrm{sh} z = -i\sin(iz); \qquad \mathrm{ch} z = \cos(iz)$$

$$\mathrm{th} z = -i\mathrm{tg}(iz); \qquad \mathrm{cth} z = i\mathrm{ctg}(iz) \qquad (1-17)$$

(5)对数函数：将对数函数 $\mathrm{Ln} z$ 定义为指数函数的反函数。即，若 $z=e^w$，则 $\mathrm{Ln} z=w$。设 $w=u+iv$，则由 $z=e^w=e^u(\cos v+i\sin v)$ 可知

$$u = \ln|z|$$

$$v = \mathrm{Arg}z$$

$$\therefore \qquad \mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z$$

显然，Lnz 是多值函数，多值性来源于 Arg$z$ 的多值性。与 Arg$z$ 的主值对应的 Lnz 的函数值称为 Lnz 的主值，记为 ln$z$，不难看出

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

(6)反三角函数：将反三角函数定义为三角函数的反函数。以反正弦函数为例：设 $z=\sin w$，则 $\mathrm{Arcsin}z=w$，由定义式知

$$z = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw})$$

可解出

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$$

利用对数函数表示为

$$w = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$$

$$\therefore \qquad \mathrm{Arcsin}z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$$

显然，Arcsin$z$ 是多值函数，多值性来源于对数的多值性和二次根式的双值性。

用同样的方法可以定义 Arccos$z$、Arctg$z$ 和 Arccot$z$ 等反三角函数。

(7)反双曲函数：函数 sh$z$、ch$z$、th$z$ 和 cth$z$ 的反函数称为反双曲函数，分别记为 Arsh$z$、Arch$z$、Arth$z$ 和 Arcth$z$。若 $w=\mathrm{Arsh}z$，则意味着 $z=\mathrm{sh}w=\frac{1}{2}(e^{w}-e^{-w})$，此即 $e^{2w}-2ze^{w}-1=0$。解此方程得到

$$e^{w} = z + \sqrt{z^2+1}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{Arsh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$$

Arsh$z$ 是多值函数，多值性来源于对数的多值性和二次根式的双值性。其他反双曲函数均可用同样的方式处理。

3. 多值函数的单值化

函数的极值、连续等概念不能直接用于多值函数。为此，需将多值函数单值化。方法有：

(1)取多值函数的主值，或某一单值的分支。

(2)把函数的定义域改变。即将复平面改为黎曼面。原来复平面上的一个点被函数映射为一组复数值，现在是黎曼面上的一个点被函数映射为唯一的一个复数值。

4. **复变函数的导数**

(1)定义：$f(z)$在 z_0 的导数定义为

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

这里要求极限存在，且与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关。

(2)$f(z)$在 z_0 点导数存在的充要条件：设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则充要条件表示为：

①$u(x,y)$和 $v(x,y)$在 z_0 点连续；

②$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$在 z_0 点存在且连续；

③满足科希－里曼条件($C-R$ 条件)：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\qquad(1-18)$$

5. **解析函数**

(1)定义：复变函数 $f(z)$在 z_0 点解析，是指 $f(z)$在 z_0 及其 ε 邻域内点点可导。

(2)$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在 z_0 解析的充要条件：

①$u(x,y)$、$v(x,y)$在 z_0 及其 ε 邻域处处连续；

②$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$在 z_0 及其 ε 邻域的各点处存在且连续；

③在 z_0 及其 ε 邻域内，满足 $C-R$ 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

6. **调和函数**

(1)满足拉普拉斯方程

$$\triangle_2 v(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (1-19)$$

的函数 $v(x,y)$称为调和函数；

(2)两调和函数 $u(x,y)$和 $v(x,y)$，若满足 $C-R$ 条件，则称它们为互为共轭的调和函数；

(3)解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的实部 $u(x,y)$与虚部 $v(x,y)$是互为共轭的调和函数。另一方面，任意一对互为共轭的调和函数可定义一个解析函数。

二、解题指导

1. 复数运算

(1)正确选择代数式、三角式或指数式进行运算，可以简化运算过程；

(2)任一复数均可用复平面上的矢量表示。因此，常可借助于矢量模型简化运算过程。

[例 1] 写出(1)$z=\sqrt{a+ib}$ (a,b 为实常数)；

$$(2)\ z=\frac{(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-i\sin 3\varphi)^3}$$

的代数式。

解：显然第(1)题应选用代数式。令

$$z = \sqrt{a+ib} = x + iy$$

则有

$$a + ib = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

此式导致二元二次联立方程组

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

其解为

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}$$

第(2)题以采用指数式为宜：

$$z=\frac{(\cos5\varphi+i\sin5\varphi)^2}{(\cos3\varphi-i\sin3\varphi)^3}=\frac{(e^{i5\varphi})^2}{(e^{-i3\varphi})^3}$$

$$=\frac{e^{i10\varphi}}{e^{-i9\varphi}}=e^{i19\varphi}$$

$$\therefore \qquad z=\cos19\varphi+i\sin19\varphi$$

［例 2］ 求 $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cdots+\cos n\alpha$

解:此题中的每一项均可看成是复数的实部,意即

$$\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cdots+\cos n\alpha$$

$$=\mathrm{Re}(e^{i\alpha})+\mathrm{Re}(e^{i2\alpha})+\cdots+\mathrm{Re}(e^{in\alpha})$$

$$=\mathrm{Re}(e^{i\alpha}+e^{i2\alpha}+\cdots+e^{in\alpha})$$

右式的和式可用等比级数公式求出

$$e^{i\alpha}+e^{i2\alpha}+\cdots+e^{in\alpha}=\frac{e^{i(n+1)\alpha}-e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-1}$$

$$=\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left[e^{i(n+\frac{1}{2})\alpha}-e^{i\frac{\alpha}{2}}\right]}{e^{i\frac{\alpha}{2}}\left[e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right]}$$

$$=\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\alpha+i\sin(n+\frac{1}{2})\alpha-\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}}{2i\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+i\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\therefore \quad \cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

［例 3］ 求 $\sqrt[3]{-8}$

解：根式运算以指数形式为宜：

$$\because \qquad -8 = 8e^{i(\pi+2k\pi)}$$

$$\therefore \qquad \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\, e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} \qquad (k=0,1,2)$$

将 $k=0,1,2$ 代入，即得到

$$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} 1+i\sqrt{3} \\ -2 \\ 1-i\sqrt{3} \end{cases}$$

［例 4］ 试证明 z_1, z_2 与 z_3 在一条直线上的条件是：$(z_1-z_3)/(z_2-z_3)$ 为实数。

解：如图所示。线段 z_1z_3 的辐角为 $\arg(z_1-z_3)$；线段 z_2z_3 的辐角为 $\arg(z_2-z_3)$，此两线段的夹角为

$$\varphi = \arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

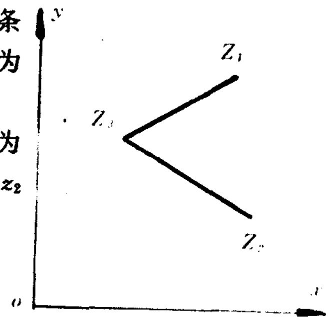

图 1-1

z_1, z_2, z_3 在一直线上的条件为 $\varphi=\pi$。

令

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} = \rho e^{i\varphi}$$

则

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} = \rho e^{i\pi} = -\rho$$

此即 $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ 为实数。

［例 5］ 说明不等式 $0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$ 的几何意义。

解：此题要求在复平面上找出一个区域，该区域内的点满足给出的不等式。

根据辐角的定义，可把 $\frac{z-i}{z+i}$ 的辐角用 x,y 表示出，从而导出 x,y 满足的不等式，所以解题时应采用代数式：