

小学
数学
疑
难
问
题
解
析



湖南教育出版社

小学数学疑难问题解析

张悌平 编著

湖南教育出版社

小学数学疑难问题解析

张悌平 编著

责任编辑：邵泰芳

湖南教育出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行 贵州铜仁地区印刷厂印刷

1983年1月第1版第1次印刷

字数：83,000 印张：4.625 印数1—140,000

统一书号：7284·108 定价：0.35元

前 言

我在多年从事中等师范教育和广泛接触小学教师的过程中，发现小学数学教材中有些疑难问题，个别教师在教学中还感到困难，特别是怎样认识小学数学教材渗透现代数学思想，如集合、函数等问题，困难更大。为此，特编写了这本《小学数学疑难问题解析》，目的是想既有利于系统地提高小学数学教师的数学基础知识，又能帮助分析、钻研小学数学教材，解决教学中的疑难问题，提高教学质量。故编写的原则是：提出的问题力求从实际出发，做到准确，并要有一定的系统性；所引用的例题尽量选用“全日制十年制学校”小学数学教材中的例题或习题，做到理论联系实际；解析过程由浅入深，深入浅出，并在理论上加以阐述。这样，便可作为小学数学教师教学的参考资料，在校的师范学生也可作为学习数学教材、教法的辅导资料，学生家长亦可用以辅导子女学习。

本书的主要内容是：

阐明整数、分数、小数、几何初步知识和比例等有关概念，分析概念之间的内在联系；对上述内容难于理解的问题加以解析；说明或证明四则运算中某些法则的算理；指出和分析学生在计算中易犯的错误，以便在教学中注意纠正；举例说明小学数学教材在哪些方面渗透了现代数学思想，应怎样理解和掌握它。

本书在编写过程中，承永顺教育局滕久旺，永顺教学辅导站

钱漱石、永顺第一中学张启崧、永顺民族师范黄费充、长官民族中学罗加猷、彭图海、长官教学辅导站龚兴荣等同志的支持和帮助，特此致谢！

作者于1982年6月

目 录

一、整数概念部分.....	(1)
1、什么叫自然数、自然数列？它们的特性和作用怎样？	(1)
2、什么叫计数公理？举例说明	(3)
3、什么叫十进制制？数位的名称和该数位上的计数单位有怎样的关系？为什么我们只要用十个阿拉伯数字即1、2、3……和0就可以记出一切数来？	(3)
4、“0”是怎样产生的？它有什么重要作用？	(6)
5、“1”有哪些重要的意义和作用？	(8)
二、加法部分	(8)
6、什么叫加法？它与计数有什么关系？为什么说加法的运算是永远可能的，其和是唯一的？	(9)
7、加法有哪些运算定律？加法运算定律是怎样产生的？有何作用？	(11)
8、应怎样理解“0”在加法中的计算？	(13)
9、加数的变化所引起的和的变化规律是什么？我们掌握了这些规律有什么作用？	(14)
10、用加法可以解哪几类应用题？这些应用题之间有什么联系和区别？并各举一例加以说明。	(15)
三、减法部分	(18)

- 11、什么叫减法?为什么说减法是加法的逆运算?…(18)
- 12、怎样理解“0”在减法中的计算? ……(19)
- 13、在未学习负数以前,为什么减法的运算要在被减数大于或等于减数时,才有可能,其差是唯一的? ……(20)
- 14、加、减法有哪些运算性质?它有什么作用?…(21)
- 15、加、减法的验算法则各有哪一些?其理论依据各是什么? ……(23)
- 16、被减数与减数的变化所引起的差的变化规律是什么?我们掌握了这些规律有什么作用? ……(24)
- 17、用减法可以解答哪几类应用题?这些应用题之间有什么联系和区别?各举一例加以说明。…(26)

四、乘法部分……………(28)

- 18、什么叫乘法?为什么说乘法是加法的一种简便算法(即求几个相同加数的和的简便运算)?…(28)
- 19、为什么说乘法的运算也是永远可能的,其积是唯一的? ……(30)
- 20、乘法具有哪些运算定律?有什么作用?举例说明。 ……(31)
- 21、关于乘数是“1”或“0”的乘法应怎样理解?…(35)
- 22、因数的变化所引起的积的变化规律是什么?我们掌握了这些规律有什么作用? ……(36)
- 23、用乘法可以解答哪几类应用题?这些问题之间有什么联系和区别?并各举一例加以说明。…(38)

五、除法部分……………(40)

- 24、什么叫除法?为什么说除法是乘法的逆运算?…(40)

- 25、怎样理解“1”和“0”在除法中的运算？……（41）
- 26、除法与减法有什么关系？……（42）
- 27、在除法运算中，为什么要规定“0”不能做除数？……（43）
- 28、为什么说在除数不是“0”的条件下，除法的运算是永远可能的，其商是唯一的？……（45）
- 29、乘、除法有哪些运算性质？其作用怎样？……（46）
- 30、被除数、除数的变化所引起商的变化规律是什么？掌握了这些规律有什么作用？……（48）
- 31、乘、除法验算的理论依据各是什么？……（50）
- 32、什么是有余数的除法？余数为什么一定要小于除数？……（51）
- 33、有余数的除法具有怎样的性质？ $48 \div 5 = 9 \cdots 3$ ， $4800 \div 500 = 9 \cdots 3$ 和 $4.8 \div 0.5 = 9 \cdots 3$ 对吗？为什么？……（53）
- 34、用除法可以解决哪几类应用题？这些问题之间有什么联系和区别？各举一例说明。……（54）
- 六、四则混合运算部分……（56）
- 35、为什么称加、减法是第一级运算？乘、除法是第二级运算？在有括号的算式里为什么要规定先算括号里面的数？……（56）
- 36、在一个四则混合算式里，如果没有括号，为什么要按“先乘除，后加减”的规定计算？……（58）
- 七、数的整除部分……（60）
- 37、什么叫倍数和约数？在讲“数的整除”时，一般指自然数，不包括“0”，其意义何在？……（60）

- 38、倍数有哪些基本性质？它有什么作用？……………（62）
- 39、能被7整除的数的特征是什么？根据什么理由？……………（64）
- 40、为什么说：“如果某数能同时被两个互质数整除，那么，这个数也能被它们的积整除”？……（65）
- 41、“1”为什么既不算质数，也不算合数？……………（66）
- 42、“0”也可以看作偶数，这是什么意思？……………（66）
- 43、为什么能用分解质因数法求几个数的最大公约数？……………（67）
- 44、求几个数的最大公约数，为什么一定要分解成质因数的连乘积？为什么不能用合数连乘积？……（68）
- 45、为什么用辗转相除法，也可以求两个数的最大公约数？……………（68）
- 46、为什么能用分解质因数法求几个数的最小公倍数？求几个数的最小公倍数时，为什么一直要除到所得的商是互质数为止？……………（70）
- 47、为什么用分解质因数法求几个数的最大公约数时，只要用相同质因数的连乘积；而求最小公倍数时，既要用相同的质因数乘，又要和所有的不相同的质因数连乘？……………（72）
- 48、为什么能用两个数的最大公约数去求它们的最小公倍数？……………（73）
- 八、复名数部分……………（74）
- 49、什么叫做量和度量？数和量有何联系和区别？……（74）
- 50、什么叫做化法和聚法？……………（75）
- 51、在复名数四则运算中，我们应注意哪些问题？……（76）

九、简单几何图形部分	(77)
52、计算面积为什么要用“平方”做单位？有了面积单位之后，为什么又不能直接用面积单位去度量面积的大小？	(77)
53、两个矩形的面积相等，周长是不是一样？若周长相等，面积又是不是一样？	(79)
十、分数的意义和性质部分	(82)
54、什么叫分数？分数是怎样产生的？	(82)
55、为什么说分数是除法的进一步发展？是除的一种高级形式？一个分数可以有几种不同的说法？	(85)
56、为什么分数里没有基本单位？	(86)
57、为什么不用加号“+”把带分数的整数和分数部分连接起来？	(87)
58、分数是怎样分类的？为什么要有两种不同的分法？	(87)
59、怎样判定两个分数是否相等？	(88)
60、分数的基本性质是什么？它的主要作用有哪些？	(89)
十一、分数加、减法部分	(89)
61、在分母不同的条件下，进行分数加、减法运算时，为什么首先要通分；然后才能进行计算？	(89)
十二、分数乘、除法部分	(90)
62、在分数乘法中，当乘数是真分数时，为什么积愈乘愈小？	(90)
63、已知某数的几分之几是多少求某数，为什么要	

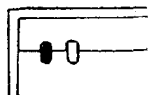
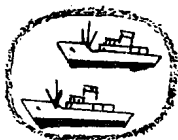
- 用除法计算？它与求一个数的几分之几的问题有何关系？……………(92)
- 64、当除数是真分数时，为什么所得的商，反而大于被除数？……………(94)
- 65、分数除法法则为什么是“除以一个数，就等于乘以这个数的倒数”？……………(95)
- 66、在解分数(包括百分数)应用题时，为什么常出现题目中没有的已知数“1”加入运算行列？……(101)
- 十三、小数部分……………(102)
- 67、小数既是特殊形式的分数，为什么能按照整数的记数法来计数呢？小数点的意义和作用怎样？……………(102)
- 68、小数加减法，为什么要在小数点位置对齐的情况下，才能进行计算？……………(103)
- 69、小数乘法的积的小数位数为什么是根据两乘数小数位数的和来确定？……………(104)
- 70、小数除以小数的除法，为什么只要将除数的小数化为整数，使它变成小数除以整数的除法来做？……………(105)
- 71、在记数或计算时，为什么常常出现近似数？怎样求近似商？求近似商有哪几种方法？……………(107)
- 72、为什么常把分数和小数互化？怎样互化？……………(112)
- 73、什么叫做循环小数？为什么循环小数能化成普通分数？……………(113)
- 十四、比例部分……………(116)
- 74、求比值和化简比有何不同？它们有何联系和区

别?	(116)
75、比和比例有何联系和区别?	(117)
76、判别两种相关联的量成何种比例, 有哪些方 法?	(118)
77、比例分配问题具有什么特征? 如何运用比例算 法来解答这类问题?	(119)
十五、其它部分.....	(125)
78、现行小学数学教材中渗透了哪些现代数学思想? 各体现在哪些方面? 我们怎样去认识和理解 它?	(125)

一 整数概念部分

1、什么叫自然数、自然数列？它们的特性和作用怎样？

由于生产和生活的实际需要，人们在数事物的个数时，产生了象一、二、三、四……这样的数。这些用来表示事物个数的数，就叫做自然数。如小学数学第一册第4面的图例：



2

在二只鸭子的下面写上数字“2”。就是有意思地揭示出自然数的意义。不仅如此，还把二只轮船用圈圈起来，这又“渗透”着集合的思想。（有关集合的一些基本知识，后面专题讲述。）

每个自然数不仅可以用于计数（即回答有多少个事物），而且也可以用于编号（即回答是第几个事物）。用于表示事物数量多少的自然数叫基数；表示事物前后顺序的自然数叫序数，这就是自然数的双重意义。例如我们说某人有兄弟2人，这个“2”是基数；说某人是老2，则这个“2”便是序数。

但应注意，并不是说在任何情况下，一个自然数都同时具有基数与序数的双重意义，具体情况要具体分析。

自然数意义很重要，它不仅应用于计数，解应用题，而且它在理论上为以后所讲的整数、分数及其四则运算打下基础。

自然数列与自然数是两个不同的概念。从“一”开始，以后逐次增加“一”，得到下一个自然数，并按顺序、依次排列，就得到一列自然数，即：

一、二、三、四、五……九十九、一百……，这样一列有次序的自然数的全体，便叫做自然数列。

自然数列是无限个自然数的集合，而自然数仅是这个集合里的一个元素。

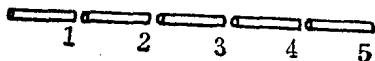
从自然数列的意义上我们不难看出：自然数列是有头无尾、大无止境而且有序的一种数列。所谓“有头”，就是自然数里有开始的第一个数，即单位一。所谓“无尾”，就是说在自然数里找不到最大的一个数。同时，每一个自然数的后面总有一个数而且也仅有一个数紧跟着它（叫做后继数）；除单位一以外，每一个自然数的前面同样总有一个数而且也仅有一个数（叫做先行数），这就是说在自然数列里绝没有两个或两个以上相等的数。

所以，任意两个自然数排在前面的较小，排在后面的较大。

根据自然数列这一特性，可得到它的几个主要作用：

①表示计数物体的多少。例如：第一册第9面，教学“5”的认识时，就有这样的图例：

总事物中的事物：
自然数列：



所谓计数，就是把自然数列中的自然数和所要计数总体中

事物的个数，从“一”开始依次建立一一对应的过程（用箭头符号表示），这样，总体中最后一个事物所对应的那个自然数，就表示这总体中事物的总个数。

②辨别数的大小。例如第二册第17面就有这样的问题：

$$5 > 3; 5 < 6。$$

为什么5大于3呢？根据自然数列的特性，我们可以知道：在自然数列里，“一”是最前面的一个数，一的后面紧跟着二、二的后面紧跟着三，这样一个紧跟着一个，乃至无穷；从前面往后面数一个比一个多“一”，由后面往前面数，则一个比一个少“一”。因为在自然数列里“3”是排在“5”的前面，也就是说在3的基础上，逐次增加两个单位“一”以后才能得到5，所以5比3大。

③自然数列是以后很多数学概念的理论依据。例如：为什么说加法运算是永远可能的，而它的和是唯一的呢？这都要用自然数列的特性加以解释（后面讲加法的有关问题时再详述）。

2、什么叫计数公理？举例说明。

人们在计数的实践中，获得了一条计数公理：即计数的结果和计数时事物的顺序没有关系。例如，我们要清点教室里有多少名儿童，无论你按横排座位的顺序去数，还是按直行的顺序去数，先数哪一些，后数哪一些，都没有关系。只要不重复、不遗漏，不论怎样数，也不管是谁去数，其结果总是一样的。它不需要作任何说明，更不需要经过什么证明，这一为大家所确信无疑的真理，就叫做公理。

3、什么叫十进制？数位的名称和该数位上的计数单位有怎样的关系？为什么我们只要用十个阿拉伯数字即1、2、3……和0就可以记出一切数来？

这里，首先要说明几个有关的名词：

数字：是表示数目的一种符号，它只有如题中所述的十个阿拉伯数字。

数目：是表示量的程度的符号，由一个或几个数字（有时还需要添上其他符号，如小数点、分数线等）所组成。数目是无穷的，要多少就有多少。

数位：是指一个数目中每一数字所占居的位置。

每一个数如果都要用一个独立的符号把它写出来，都要用一个独立的名称把它读出来，那是不可能的，也是不必要的。这就要求人们在实践中建立一些原则，使之能用最少的符号和名称来表示任意一个数。现在世界各国所通用的十进位制的记数原则和读数原则就符合这个要求。

十进位制的读数原则包括下面三条内容：

一是有最初的十个整数的独立名称。即一、二、三、四……和零；

二是有一系列的十进计数单位。即……亿、千万、百万、十万、万、千、百、十和一。它们当中每十个某一单位，就组成和它相邻的较高的一个单位，即十进位制；

三是有组成数的规律。如一个数中含有几个百、几个十和几个一，就读作“几百几十几”。利用这个规律，对于十以上的数就可以不再给予新的名称，而只要把十、百、千、万……这一系列十进计数单位（“一”是基本单位，其它是辅助单位），和最初那十个整数的独立名称结合起来，就可以记出任意数。例如，从第三册课本的封面上画的计数器中我们可以看出：各数位上的名称，就表示该数位上的单位。如数目4357，数字4在千位上，3在百位上，5在十位上，7在个位上，这

个数包含着4个千、3个百、5个十和7个一。因此，就读做四千三百五十七。

十进位制的记数原则也包含有如下三项内容：

一是有最初的十个整数的独立符号。即1、2、3、4……和0；

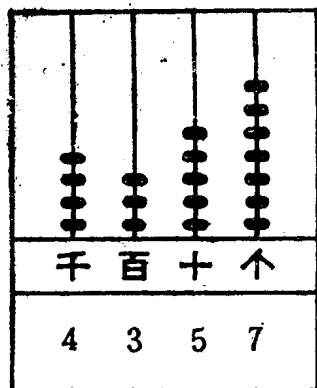
二是有各个十进单位的位置顺序。记数时各个十进单位，都有其固定位置，

即按照十进顺序由低到高，由右到左进行排列；

……亿位、千万位、百万位、……个位。

一个数字只能占有一个位置；

三是有数字记在数位上的规律。即不同的数字记在同一数位上，就表示不同的数；同一个数字记在不同的数位上，也表示不同的数。例如第一册第87面，练习三十三，就有这样的练习。



十位	个位
1	5
5	1

十位	个位
3	7
7	3

百位	十位	个位
	8	0
1	0	0

利用这种记数表（教学时最好做成一种活动的、能用数字