北京市高等教育精品教材立项项目

微积分

《微积分》编委会　组编
刘书田　冯翠莲　编

高等教育出版社

北京市高等教育精品教材立项项目

微 积 分

《微积分》编委会 组编
刘书田 冯翠莲 编

高等教育出版社

内容提要

本书以教育部最新颁布的高等专科教育、高等职业教育、成人高等教育经济和管理类《经济数学基础课程教学基本要求》为依据，充分考虑到“微积分”学科本身的科学性，较系统地讲述了“一元函数微积分学”的基本概念、基本理论和基本运算方法，并简略介绍了“二元函数微分学”的一些基本知识。教材中每节后配有练习，每章后配有习题，书后附有参考答案。对有关基本概念和基本理论，既注重实例和数学分析，又注重以几何图形进行简要的解释；还特别注意讲授解题思路、解题方法和数学在经济问题中的应用，从而达到学以致用的教学目的。本书配有课学件。

本教材适合成人高等院校、普通高等院校和高等职业技术院校的经济类、管理类专业专科生使用，也可供参加高等教育自学考试和国家文凭考试的学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

微积分 /《微积分》编委会组编. —北京：高等教育出版社，2003.8（2004 重印）
ISBN 7-04-012922-1

Ⅰ.微...　Ⅱ.微...　Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 044861 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　本	787×960　1/16	**版　次**	2003 年 8 月第 1 版
印　张	14.75	**印　次**	2004 年 4 月第 3 次印刷
字　数	270 000	**定　价**	31.30 元（含光盘）

前　　言

为了适应我国当前成人高等教育迅速发展的需要，我们依照教育部最新颁布的高等专科教育、高等职业教育、成人高等教育经济和管理类《经济数学基础课程教学基本要求》，编写了这本教材.

在编写教材时，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，强化概念，注重应用.以课程教学基本要求的内容为依据，充分考虑到“微积分”学科本身的科学性，慎重选择教材内容，注意深度和广度，较系统地讲述了“一元函数微积分学”的基本概念、基本理论和基本运算方法；并简略介绍了“二元函数微分学”的一些基本知识.对基本概念和基本理论，既注重以实例引入和数学分析，又注重以几何图形进行简要的解释，这不仅能培养学生初步抽象概括问题的能力、逻辑思维能力，又使教学内容形象、直观，易于理解和掌握.从“学以致用”考虑，本教材特别注意讲授解题思路、解题方法和数学在经济问题中的应用，这将使学生能较熟练地掌握运算能力和综合运用所学知识分析问题的能力；并使学生初步学会经济分析中的定量方法.本教材，既注意行文严谨和逻辑严密，又注意叙述通俗、易懂，便于学生自学.

教材中每节后配有练习，每章后配有习题，习题中还选编了单项选择题.习题参考答案和解法提示附在书的最后，以供师生参考.

本教材适合成人高等院校、普通高等院校和高等职业技术院校的经济类、管理类专业专科生使用，也可作为参加高等教育自学考试和国家文凭考试的学生使用.

本书由首都经贸大学张广梵教授主审，并提出宝贵意见。

编者

20002 年 10 月

策划编辑 蒋　青
责任编辑 丁鹤龄
封面设计 李卫青
责任绘图 尹文君
版式设计 王艳红
责任校对 康晓燕
责任印制 杨　明

郑 重 声 明

目　　录

第一章

函　　数

函数是微积分学最重要的基本概念之一，是微积分学研究的对象.

本章在复习函数概念及其几何特性时，并介绍微积分学主要讨论的初等函数.

§1.1 函　　数

一、函数概念

(一) 函数定义

1．常量与变量

自然界错综复杂，我们在观察某一自然现象或分析某一经济问题时，往往会遇到各种各样的量.其中在某一过程中起变化，可以取不同数值的量称为**变量**；在某一过程中不起变化，保持同一数值的量称为**常量**.

例如，在某一个时期内，一种商品的价格保持不变，它是一个常量；而这种商品每天的销售数量却不同，它是一个变量.若在一个较长的时期内，一种商品的价格也在变化，它又是一个变量，所以，常量和变量是相对的不是绝对的.还有，正如把静止看作是运动的特例一样，常量也可看作是特殊的变量，即它始终只取同一数值的变量.

本教材中，用字母 a、b、c 或 x_0、y_0，x_1、y_1 等表示常量；而用字母 x、y、z 或 u、v、t 等表示变量.

由于全体实数与实数轴上的所有点有一一对应关系，所以，常量在实数轴上表示为一个定点，变量在实数轴上表示为一个动点．

变量所取的每一个值都是一个数，这些数所构成的集合就是这个变量的取值范围．在许多情形中，变量的取值范围是一个区间，但并非都如此，如有的变量只取整数，构不成区间．但不论是哪一种情形，变量的取值范围都可看作是一个数的集合．

2．函数定义

在我们的周围，变化无处不在，我们所看到的事物都在变化．其中，有一些变化着的现象中存在着两个变化的量．这两个变量不是彼此孤立的，而是相互联系、相互制约的．观察下面几个例子．

例 1 圆的周长 l 与半径 r 间有公式

$$l = 2\pi r \quad (r > 0),$$

在该公式中，2 和 π 是常量；r 和 l 是变量．当 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内取定一个值时，由上式计算就得到惟一确定的 l 值．

例 2 在气象观测站，气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图 1.1 所示的曲线．曲线上某一点 $P_0(t_0,\theta_0)$ 表示时刻 t_0 的气温是 θ_0．观察这条曲线，可以知道在这一天内，时间 t 从 0 点到 24 点气温 θ 的变化情形．时间 t 和气温 θ 都是变量，这两个变量之间的数量关系是由一条曲线确定的．

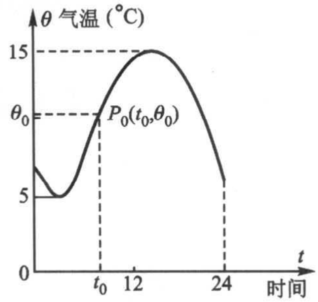

图 1.1

例 3 银行储蓄，1 年定期整存整取，年利率为 1.98%，存款金额 k 与 1 年所得利息 r 列表如下：

存款金额 k(元)	100	500	1 000	2 000	5 000	10 000
一年利息 r(元)	1.98	9.9	19.8	39.6	99	198

存款金额 k 和 1 年所得利息 r 都是变量．由该表，已知表中列出的 k，就有惟一确定的 r 与之对应，r 随 k 取不同的值而取不同的值．r 与 k 之间的数量关系由上表确定．

例 4 某地电话局按如下办法收费：每月通话次数不超过 30 次或不通话，收费 20 元；若超过 30 次，超过部分每次以 0.18 元计算．

由于每月通话次数不超过 30 次或不通话与超过 30 次的计费办法不同，每月的费用 T 与通话次数 x 之间的数量关系应有两个数学式表示，即(下式中的 x 只取非负整数)

$$T=\begin{cases}20, & 0\leqslant x\leqslant 30;\\ 20+0.18(x-30), & x>30.\end{cases}$$

问题中通话次数 x 与费用 T 是变量，x 的取值范围是非负整数. x 在其取值范围内每取定一个值，按上式 T 就有惟一确定的一个值与之对应.

以上列举的问题，虽然来自不同的领域，但是具有不同的表示形式.有公式、图形、表格，但它们的共性是：都反映了在同一过程中有着两个相互依赖的变量，当其中一个量在某数集内取值时，按一定的规则，另一个量有惟一确定的值与之对应.变量之间的这种数量关系就是函数关系.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的非空数集.若对每一个数 $x\in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有惟一确定的数值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，也称为函数；数集 D 称为该函数的**定义域**.

定义域 D 是自变量 x 的取值范围，也就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的一个数集.由此，若 x 取数值 $x_0\in D$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 **有定义**，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 遍取数集 D 中的所有数值时，对应的函数值的全体构成的集合

$$Z=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**.若数值 $x_0\notin D$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **没有定义**.

由函数的定义可知，决定一个函数蕴含三个因素：定义域 D，对应法则 f 和值域 Z.注意到每一个函数值都可由一个 $x\in D$ 通过 f 而惟一确定，于是给定 D 和 f，Z 就相应地被确定了；从而 D 和 f 就是决定一个函数的两个要素.

本书除了用字母"f"表示对应法则外，还可用字母"φ"、"g"、"F"等等来表示对应法则.它们是可以任意使用的，但若同时讨论几个不同的函数时，为了避免混淆，就用不同的字母表示不同的对应法则.

若一个函数仅用一个数学式表达，没给出自变量的取值范围，而要求我们确定该函数的定义域.这时，若不考虑该数学式的实际意义，那么确定定义域就是求使这一数学式有意义的自变量取值的全体.

例 5 求函数 $y=\dfrac{x}{\ln(x+2)}$ 的定义域.

解 这是分式，分子 x 可以取任意值，而分母 $\ln(x+2)$，因对数符号下的式子必须为正，且分母不能为零，所以有

$$\begin{cases}x+2>0,\\ x+2\neq 1,\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}x>-2,\\ x\neq -1.\end{cases}$$

从而该函数的定义域,若用不等式表示,则为 $-2<x<-1,-1<x<+\infty$;若用区间表示,则为 $(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

例 6　设 $y=f(x)=3x^2-2x-1$,求 $f(1),f(0),f(a),f(-x),f(x+1)$, $f(f(x))$.

解　这是已知函数的表达式求它的函数值.

$f(1)$是当自变量 x 取 1 时所对应的函数值.为求 $f(1)$,须将 $f(x)$的表达式中的 x 换为数值 1,可得

$$f(1)=3\cdot 1^2-2\cdot 1-1=0,$$

或记作　$$y|_{x=1}=(3x^2-2x-1)|_{x=1}=3\cdot 1^2-2\cdot 1-1=0.$$

同理可得　$$f(0)=3\cdot 0^2-2\cdot 0-1=-1,$$

或　$$y|_{x=0}=3\cdot 0^2-2\cdot 0-1=-1.$$

为求 $f(a)$,须将 $f(x)$的表达式中的 x 换为 a,得

$$f(a)=3a^2-2a-1 \text{ 或 } y|_{x=a}=3a^2-2a-1.$$

同理,以 $-x$ 代换 x,以$(x+1)$代换 x 分别得

$$f(-x)=3(-x)^2-2(-x)-1=3x^2+2x-1,$$

$$f(x+1)=3(x+1)^2-2(x+1)-1=3x^2+4x.$$

以 $f(x)$的表达式代换 $f(x)$中之 x,得

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= 3[f(x)]^2-2f(x)-1 \\ &= 3[3x^2-2x-1]^2-2(3x^2-2x-1)-1 \\ &= 27x^4-36x^3-12x^2+16x+4. \end{aligned}$$

(二) 函数的表示法

表示函数的方法主要有以下三种:公式法,图形法和列表法.

1. 公式法

变量 x 与 y 之间的函数关系用数学表达式表示,称为**公式法或解析法**.如例 1 就是用公式法表示圆的周长 l 与半径 r 之间的函数关系.用公式法表示函数,便于理论分析和计算.

2. 图形法

用几何图形表示变量 x 与 y 之间的函数关系,称为**图形法**.用图形法表示函数,形象直观,易看到变量 y 随 x 变化而变化的趋势.如例 2 就是用一条曲线表示一天内气温 θ 与时间 t 之间的函数关系.

在微积分学中主要是讨论用公式法表示的函数,而以函数的图形作为辅助工具.

3. 列表法

若变量 x 与 y 之间有函数关系,将一系列自变量 x 的数值与对应的函数值

y 列成表,以表示函数 $y=f(x)$,称为**列表法**.如例 3 就是用列表法表示一年所得利息 r 与存款金额 k 之间的函数关系.列表法的优点是使用方便.

(三) 分段函数

在用公式法表示两个变量之间的函数关系时,有的要用两个或多于两个的数学式子来表达,即在定义域的不同部分用不同数学式子来表达,称为**分段函数**.例如,例 4 就是分段函数.

例 7 设函数(图 1.2)

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & -2\leqslant x<0; \\ 2, & x=0; \\ 1+x, & 0<x\leqslant 3, \end{cases}$$

求函数的定义域,并求函数值 $f(-1)$,$f(0)$,$f(2)$.

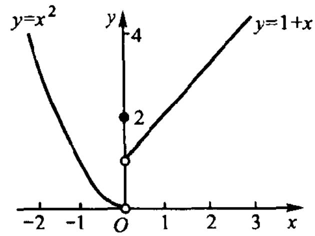

图 1.2

解 这是分段函数,分段点是 $x=0$.分段函数的定义域是各段函数自变量取值范围之并,即 $[-2,0)\cup(0,3]\cup\{0\}$,故定义域是闭区间$[-2,3]$.

函数 $f(x)$的对应法则是:若自变量 x 在区间$[-2,0)$内取值,则相对应的函数值用 $f(x)=x^2$ 计算;若 x 取 0,则对应的函数值是 2;若 x 在$(0,3]$内取值,则对应的函数值用 $f(x)=1+x$ 计算.

因 $-1\in[-2,0)$,所以 $f(-1)=(-1)^2=1$;

如前所述,$f(0)=2$;

因 $2\in(0,3]$,所以 $f(2)=1+2=3$.

二、函数的几何特性

函数的几何特性一般是指函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

(一) 函数的奇偶性

观察函数 $y=x^3$ 的图形,由图 1.3 看到,曲线 $y=x^3$ 关于坐标原点对称,即自变量 x 取一对相反的数值时,相对应的一对函数值也恰是相反数,这时称 $y=x^3$ 为奇函数.图 1.4 表明,函数 $y=x^2$ 的图形关于 y 轴对称,即自变量 x 取一对相反的数值时,相对应的函数值却相等,这时,称 $y=x^2$ 为偶函数.

定义 1.2 设函数 $f(x)$的定义域是以原点为对称的数集 D,若对所有的 $x\in D$,有

(1) $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**;

(2) $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**.

奇函数的图形关于坐标原点对称;偶函数的图形关于 y 轴对称.