

周概容 编著

概率论与数理统计 大讲堂

单项选择题专项突破



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计 大讲堂

单项选择题专项突破

周概容 编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

© 大连理工大学出版社 2005

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计大讲堂·单项选择题专项突破 / 周概容编著.
大连: 大连理工大学出版社, 2005. 8

ISBN 7-5611-2971-8

I. 概… II. 周… III. ①概率论—研究生—入学考试—解题
②数理统计—研究生—入学考试—解题 IV. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 084271 号

大连理工大学出版社出版

地址: 大连市凌水河 邮政编码: 116024

电话: 0411-84708842 传真: 0411-84701466 邮购: 0411-84707961

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 140mm×203mm 印张: 5.75 字数: 209 千字

印数: 1~6 000

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑: 吴孝东

责任校对: 高继巍

封面设计: 宋 蕾

定 价: 12.00 元

卷首感言



大学是人一生中最为关键的阶段。从入学的第一天起,你就应当对大学四年有一个正确的认识和规划。为了在学习享受到最大的快乐,为了在毕业时找到自己最喜爱的工作,每一个刚进入大学校园的人都应当掌握七项学习:学习自修之道、基础知识、实践贯通、兴趣培养、积极主动、掌控时间、为人处事。只要做好了这七点,大学生临到毕业时的最大收获就绝不会是“对什么都没有的忍耐和适应”,而应当是“对什么都可以有的自信和渴望”。只要做好了这七点,你就能成为一个有潜力、有思想、有价值、有前途的、快乐的毕业生。



数学是理工科学生必备的基础。很多学生在高中时认为数学是最难学的,到了大学里,一旦发现本专业对数学的要求不高,就会彻底放松对数学知识的学习,而且他们看不出数学知识有什么现实的应用或就业前景。但大家不要忘记,绝大多数理工科专业的知识体系都建立在数学的基础之上。例如,要想学好计算机工程专业,那至少要把离散数学(包括集合论、图论、数理逻辑等)、线性代数、概率统计和数学分析学好;要想进一步攻读计算机科学专业的硕士或博士学位,可能还需要更高的数学素养。同时,数学也是人类几千年积累的智慧结晶,学习数学知识可以培养和训练人的思维能力。通过对几何的学习,我们可以学会用演绎、推理来求证和思考的方法;通过学习概率统计,我们可以知道该如何避免钻进思维的死胡同,该如何让自己面前的机会最大化。所以,大家一定要用心把数学学好,不能敷衍了事。学习数学也不能仅仅局限于选修多门数学课程,而是要知道自己为什么学习数学,要从学习数学的过程中掌握认知和思考的方法。



虽然我一向鼓励大家追寻自己的兴趣,但在这里仍需强调,生活

中有些事情即便不感兴趣也是必须要做的。例如，打好基础，学好数学、英语和计算机的使用就是这一类必须做的事情。如果你对数学、英语和计算机有兴趣，那你是幸运儿，可以享受学习的乐趣；但就算你没有兴趣，你也必须把这些基础打好。打基础是苦功夫，不愿吃苦是不能修得正果的。

经过大学四年，你会从思考中确立自我，从学习中寻求真理，从独立中体验自主，从计划中把握时间，从交流中锻炼表达，从交友中品味成熟，从实践中赢得价值，从兴趣中攫取快乐，从追求中获得力量。

离开大学时，只要做到了这些，你最大的收获将是“对什么都可以拥有的自信和渴望”。你就能成为一个有潜力、有思想、有价值、有前途的中国未来的主人翁。

李开复

2005年2月

——摘自：“给中国学生的第四封信：大学四年应是这样度过”

前言

硕士研究生入学统一考试的数学试题主要有三种题型,即填空题、单项选择题、解答题(其中包括计算题、应用题和证明题)。这套书是按照全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》编写的考研参考书,专门介绍单项选择题,分为三册:高等数学(含微积分和空间解析几何)、线性代数、概率论与数理统计。其中每册书都是按照《数学考试大纲》的章节顺序编写的,每章的第一部分是“概念、性质和公式”,以很小的篇幅简明扼要地介绍该章的基本概念、性质和常用方法;然后是“典型例题分析”,通过一定量的例题介绍选择题的各种题型及其求解方法。为了能简洁地传递考研信息,本书中对所选用的历年考研真题采用“年代/类别/分值”的标注方式。例如,“010403”表示该题是2001年全国硕士研究生入学统一考试“数学四”试卷的一道分值为3分的试题。每章的最后,针对主要题型配有适量的习题,并附有参考答案。

在填空、选择、解答三种题型中,填空题和选择题为“客观性试题”,解答题是“主观性试题”,三种类型的功能各有不同。概括地说,填空题多为简单的计算题或概念题,主要考查考生对于一些最基本的概念、性质、公式掌握和运用的熟练程度,快捷、准确的运算能力以及正确的判断能力和推理能力。解答题中的计算题和应用题,主要考查考生对数学有关内容的概念、原理和方法的掌握与熟练的程度,灵活运用以及数学运算、抽象概括、分析和解决实际问题的能力;证明题除考查对基本原理和方法的掌握程度外,主要考查逻辑推理能力;选择题则主要考查分析、比较、鉴别和判断的能力。

单项选择题包含四个选项,其中只有一个是正确选项,为便于叙述,称为“主考项”或“正确项”;其他三个选项是错误选项,称为“干扰项”或“错误项”。选择题有理论性、概念性和计算性三种基本类型。三种类型的选择题,在历年的全国硕士研究生入学统一考试中都有出现,其中理论性和概念性选择题居多。本书以理论性和概念性选择题为主体,同时也选入了一些计算性的选择题。选择题一般围绕着有关内容的重要或关键环节、基本特点或重要性质、容易出错的概念或方法编制;选择题的功能在于考查考生对有关内容理解的深度,是否抓住了有关内容的关键,是否掌握了有关内容与其他相关内容的联系和区别。选择题的求解,除了需要形式逻辑方面的能力外,还必须具有必要的“直观感觉”。这里所说的“感觉”或“直觉”,指的是理性认识阶段的“感觉”,因为“感觉到了的东西,我们不能立刻理解它,只有理解了的东西才能更深刻地感觉它。”(毛

泽东,《实践论》)

求解选择题时,基于对题意的理解,首先要作“直觉”的判断,这种“直觉”是对问题深入思考、理解和认识的结果,是思维深刻性的表现。解计算题一般可以按一定的程序和方法完成运算,而解选择题,不像解计算题那么规范,主要依靠思维的深刻性、鉴别力和判断力。对于问题的认识一般要经历“感性认识~理性认识~感性认识”的过程。只有有了更高层次的感性认识,才能有较强的鉴别力和判断力。有的考生往往不能做出正确的分析和判断,一个重要的原因就是对于问题没有真正的理解,还处于低级的感性认识阶段。求解选择题则首先要对问题有“直觉”(这种“直觉”在数学文献中常用“显然”或“易见”表述)。根据直觉可以做出初步的判断,否则就无从下手,因为考试时一般没有很长的思考时间。因此,选择题不但考查对知识掌握的程度,更重要的是考核能力。

选择题的求解过程也反映其考核功能。求解选择题,一般可以从两个方面入手:判断并选择“正确项”——直选法和排除“错误项”——排除法;对于计算性选择题,需要通过计算选出“正确项”。做出正确的判断、快捷地选出正确项或迅速地排除错误项,一方面要求考生对题中所涉及的有关内容的概念、性质及原理有较全面、深入地理解、融会贯通和灵活运用,同时还要求考生思维深入和敏捷,有较强的记忆力、分析比较并迅速做出判断的能力。解选择题原则上不需要进行大量和复杂的计算。当然,有时为了进行鉴别和验证,也要进行一些必要的计算。此外,假如可以确信某个选项是正确的,则无须证明其他选项不成立;同样,运用排除法时,也无须证明正确选项成立。不过,为使读者对有关问题能更全面深入地理解和掌握,对于多数例题我们不但对“正确项”作了证明或说明,而且对应排除的“错误项”也都作了说明或证明。

本书作者参加了全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》的起草和历次修订,连续 17 年参加了全国硕士研究生入学统一考试“数学试题”命题组,并重点负责“概率论与数理统计”试题的命制。全国硕士研究生入学统一考试许多“选择题”就是出自本书作者之手。本书所选例题还包括许多尚未发表过的“备用试题”。

本书的读者对象是准备攻读硕士学位研究生和 MBA 的报考人员,包括应届本科毕业生和同等学力考生。本书对于正在学习“概率论与数理统计”的在校大学生、大专生和自考生,也是一本很好的参考书。

编著者
2005 年 8 月

目 录

第一章 随机事件和概率

概念、性质和公式	1
典型例题分析	4
习题一	23

第二章 随机变量及其分布

概念、性质和公式	25
典型例题分析	29
习题二	46

第三章 多维随机变量及其分布

概念、性质和公式	49
典型例题分析	52
习题三	70

第四章 随机变量的数字特征

概念、性质和公式	73
典型例题分析	76
习题四	94

第五章 大数定律和中心极限定理

概念、性质和公式	97
典型例题分析	99
习题五	113

第六章 数理统计的基本概念

概念、性质和公式	115
典型例题分析	118
习题六	130

第七章 参数估计

概念、性质和公式	133
典型例题分析	137
习题七	150

第八章 假设检验

概念、性质和公式	153
典型例题分析	155
习题八	165
习题参考答案及提示	168
附表 概率论与数理统计常用数值表	
附表 1 标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 值表	169
附表 2 标准正态分布双分位数 u_α 值表	170
附表 3 t 分布双分位数 $t_{\alpha,n}$ 值表	171
附表 4 χ^2 分布上侧分位数 $\chi_{\alpha,n}^2$ 值表	172
附表 5 F 分布上侧分位数值表	174
参考文献	176

第一章 随机事件和概率

概念、性质和公式

① 事件及其运算

1.1 随机试验和事件

随机试验——对随机现象的观测；基本事件 ω ——试验最基本的结局；基本事件空间（样本空间） Ω ——一切基本事件的集合；事件——试验每一种可能的结果。常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示事件或用 $\{\dots\}$ 表示事件，这时括号内用文字或式子表示事件的内容。 Ω 表示必然事件， $\emptyset$ 表示不可能事件。

1.2 事件的关系和运算

① 包含： $A \subset B$ 表示“每当事件 A 出现时 B 也一定出现”。

② 相等： $A = B$ 表示“事件 A 和 B 要么都出现要么都不出现”，即 $A \subset B$ 且 $A \supset B$ 。

③ 和： $A \cup B$ 或 $A + B$ 表示“事件 A 与 B 至少出现一个”；

$$\bigcup_i A_i \text{ 或 } A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

表示 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 至少出现一个。

④ 差： $A \setminus B$ 或 $A - B$ 表示“事件 A 出现但是 B 不出现”。

⑤ 交： $A \cap B$ 或 AB 表示“ A 和 B 同时出现”；

$$\bigcap_i A_i \text{ 或 } A_1 A_2 \dots A_n \dots$$

表示事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时出现。

⑥ 对立事件： $\bar{A}$ 表示“事件 A 不出现”，称做 A 的对立事件。

⑦ 不相容： $AB = \emptyset$ ，表示“ A 和 B 不可能同时出现”。

⑧ 完全事件组：称事件 $\{H_1, H_2, \dots, H_k, \dots\}$ 构成完全事件组，如果：
1° $H_i H_j = \emptyset (i \neq j)$ ；2° $H_1 + H_2 + \dots + H_k + \dots = \Omega$ 。

1.3 事件运算的性质

对于任意事件 $A, B, C, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

① 交换律 $A + B = B + A; AB = BA$

② 结合律 $A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$
 $ABC = A(BC) = (AB)C$

③ 分配律 $A(B + C) = AB + AC; A(B - C) = AB - AC$

$$A(A_1 + \dots + A_n + \dots) = AA_1 + \dots + AA_n + \dots$$

④ 对偶律 $\overline{A+B} = \overline{A}\overline{B}; \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

$$\overline{A_1 + \dots + A_n + \dots} = \overline{A_1} \dots \overline{A_n} \dots$$

$$\overline{A_1 \dots A_n \dots} = \overline{A_1} + \dots + \overline{A_n} + \dots$$

② 事件的概率

2.1 概率的公理

① 非负性: 任何事件 A 的概率都是非负的: $P(A) \geq 0$;

② 规范性: 必然事件的概率等于 1: $P(\Omega) = 1$;

③ 可加性: 对于任意可数个两两不相容事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots (A_i A_j = \emptyset, i \neq j)$, 有

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

2.2 概率的运算法则

① 不可能事件的概率

$$P(\emptyset) = 0$$

② 对立事件的概率

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

③ 减法公式

对于任意二事件 A 和 B , 有

$$P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

④ 加法公式

对于任意事件 A, B, C , 有

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

⑤ 一般加法公式

对于任意可数个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) - \dots +$$

$$(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

⑥ 乘法公式

对于概率不为 0 的任意二事件 A 和 B , 有

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

对于任意 m 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$, 只要 $P(A_1A_2\cdots A_{m-1}) > 0$, 则有(一般乘法公式)

$$P(A_1A_2\cdots A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_m|A_1A_2\cdots A_{m-1})$$

⑦ 全概率公式

设 $\{H_1, H_2, \dots, H_k, \dots\}$ 是完全事件组, 且 $P(H_k) > 0$, 则

$$P(A) = \sum_k P(AH_k) = \sum_k P(H_k)P(A|H_k)$$

⑧ 贝叶斯公式

设 $\{H_1, H_2, \dots, H_k, \dots\}$ 是完全事件组, 且 $P(H_k) > 0$, 则

$$P(H_k|A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_i P(A|H_i)P(H_i)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

③ 事件的独立性和独立试验

3.1 独立事件

称二事件 A 和 B 相互独立, 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$, 否则称 A 和 B 不独立或相依; 称 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 如果它们之中任意 m ($2 \leq m \leq n$) 个事件同时出现的概率, 等于这 m 个事件概率的乘积; 称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立, 如果它们之中任意两个事件独立. 称 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为独立事件列, 如果对于任意 m ($m \geq 2$), 事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 相互独立. 称事件列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两独立, 如果其中任意两个事件独立.

① 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 相互独立, 则其中任意 m ($2 \leq m \leq n$) 个事件也相互独立.

② 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 相互独立, 则必两两独立, 但反之未必.

③ 若二事件 A 和 B 相互独立, 则 $\bar{A}$ 和 B , A 和 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 也都相互独立.

④ 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 相互独立, 则将它们之中任意 m ($1 \leq m \leq n$) 个事件换成其对立事件后, 所得 n 个事件仍然相互独立.

3.2 独立试验

称 n 个随机试验为相互独立的, 如果任何分别与各试验有关的事件相互独立; n 次独立重复试验, 指在不变的条件下将同一试验 E 独立地重复作 n 次; n 次独立重复试验, 称做 n 次伯努利试验, 如果每次试验只计“成功”和“失败”两种结局.

典型例题分析

【例 1-1】 甲、乙两个篮球队进行比赛,假设有三种可能的结局:甲胜,乙胜与平局,考虑事件 $A = \{\text{甲胜乙负}\}$,则 $\bar{A} =$ ()

A. $B_1 = \{\text{甲负而乙胜}\}$ B. $B_2 = \{\text{甲和乙平局}\}$

C. $B_3 = \{\text{甲胜或平局}\}$ D. $B_4 = \{\text{乙胜或平局}\}$

分析 应该选(D)。把“甲、乙两个篮球队比赛”视为随机试验 E, E 的基本事件空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, 其中 $\omega_1 = \{\text{甲胜}\}$, $\omega_2 = \{\text{乙胜}\}$, $\omega_3 = \{\text{平局}\}$ 。

事件 $A = \{\text{甲胜乙负}\} = \{\omega_1\}$, 因此 $\bar{A} = \{\omega_2, \omega_3\}$, 即 $\bar{A}$ 表示“乙胜或平局” $= B_4$ 。于是, (D) 是正确选项。

说明 题中事件 B_1, B_2, B_3, B_4 可以通过基本事件分别表示为

$$B_1 = \{\omega_2\}, B_2 = \{\omega_3\}, B_3 = \{\omega_1, \omega_3\}, B_4 = \{\omega_2, \omega_3\}$$

【例 1-2】 设 A, B 和 C 是任意三事件, 则下列选项中正确的是 ()

A. 若 $A + C = B + C$, 则 $A = B$ B. 若 $A - C = B - C$, 则 $A = B$

C. 若 $AC = BC$, 则 $A = B$ D. 若 $AB = \emptyset$ 且 $\bar{A}\bar{B} = \emptyset$, 则 $\bar{A} = B$

分析 应该选(D)。该题宜用直选法, 因为直观上选项(A), (B), (C) 明显不成立。

(1) **直选法** 由事件运算的对偶律, 可见

$$\overline{\bar{A}\bar{B}} = A + B = \overline{\emptyset} = \Omega$$

而由 $A + B = \Omega$ 且 $AB = \emptyset$, 可见 A 和 B 互为对立事件, 即 $\bar{A} = B$ 。于是, (D) 是正确选项。

(2) **排除法** 为说明前三个选项都不成立, 只需分别举出反例。由于 A, B, C 是二任意事件, 例如, 设 $A \neq B$, 而 $C = \Omega$ 是必然事件, 则

$$A + C = B + C = \Omega$$

$$A - C = B - C = \emptyset$$

但是 $A \neq B$, 从而命题(A) 和(B) 不成立; 设 $A \neq B, C = \emptyset$, 则 $AC = BC$, 但 $A \neq B$, 从而命题(C) 不成立。于是, (D) 是正确选项。

说明 该题的结果反映了事件的运算与数的运算的不同之处。

【例 1-3】 设 A, B, C 是任意事件, 满足 $AB \subset C$, 则 ()

A. $A \subset C$ 且 $B \subset C$

B. $\bar{A} + \bar{B} \supset \bar{C}$

C. $A \subset C$ 或 $B \subset C$

D. $\bar{A} + \bar{B} \subset \bar{C}$

分析 应该选(B)。该题宜用直选法。

(1) **直选法** 因为根据条件 $AB \subset C$, 所以由事件运算的对偶律, 可见

$$\overline{A+B} = \overline{AB} \supset \overline{C}$$

于是, (B) 是正确选项。

(2) 排除法 为说明选项(A), (C), (D) 不成立, 只需分别举出反例。例如, 设 $A \subset C, B = \Omega$, 则 $AB = A \subset C$, 但是 $A \subset C, B \supset C$, 从而选项(A) 错误;

假设随机变量 X 在 $[-2, 2]$ 上均匀分布, 引进事件

$$A = \{-2 \leq X \leq 0\}, B = \{-2 \leq X \leq 1\}$$

$$C = \{-2 \leq X \leq \frac{1}{2}\}$$

则显然 $AB = A \subset C$, 但是 $A \subset C, B \supset C$, 因此选项(C) 不成立;

最后, 对于选项(D), 假设 $AB \subset A+B \subset C$, 则根据对偶律, 有 $\overline{A+B} \supset \overline{C}$, 从而(D) 也是错误选项。

于是, 只有(B) 是正确选项。

【例 1-4】 对于任意三事件 A, B, C , 下列各等式正确的是 ()

A. $\overline{AB} = A+B$

B. $A+B = A+\overline{AB}$

C. $(A+B)-A = B$

D. $\overline{A+BC} = \overline{AC} + \overline{BC}$

分析 应该选(B)。该题采用直选法比较简便。

(1) 直选法 由事件的运算和性质, 可见

$$A+B = A+(B-AB) = A+(\Omega-A)B = A+\overline{AB}$$

于是, (B) 是正确选项。

(2) 排除法 对于选项(A),

$$\overline{AB} = (\Omega-A)B = B-AB \neq A+B$$

因此选项(A) 错误;

对于选项(C), 事件 $(A+B)-A$ 显然等价于事件“ B 出现但是 A 不出现”, 即 $B-A = B-AB$, 因而(只要 AB 不是不可能事件) 选项(C) 一般不成立;

最后, 对于选项(D), 因为事件运算的对偶律, 知

$$\overline{A+BC} = \overline{A} \overline{BC}$$

所以选项(D) 一般不成立。于是, 只有(B) 是正确选项。

【例 1-5】 (010403) 设 A 和 B 是二任意事件, 则与 $A+B=B$ 不等价的是 ()

A. $A \subset B$

B. $\overline{B} \subset \overline{A}$

C. $\overline{AB} = \emptyset$

D. $\overline{AB} = \emptyset$

分析 应该选(D)。

(1) 直选法 设 $A \neq \emptyset$ 且 $A \not\subset B$ 。若 $\overline{AB} = \emptyset$, 则依次有

$$B-AB = \overline{AB} = \emptyset, B = AB$$

$$B \subset A, A+B = A$$

于是, $A+B=B$ 与 $A+B=A$ 不等价, 从而 $A+B=B$ 与 $\overline{AB} = \emptyset$ 不等价, 即

(D) 是符合题目要求的正确选项。

(2) 排除法 只需证明 $A+B=B$ 与选项(A),(B)和(D)等价。我们证明如下关系:

$$A+B=B \Rightarrow (A) \Rightarrow (B) \Rightarrow (C) \Rightarrow A+B=B$$

其中“ $\Rightarrow$ ”表示由前项可以导出后项。

事实上,设 $A+B=B$,则由 $A \subset A+B=B$,可见 $A \subset B$,即由 $A+B=B$ 可以导出(A);设 $A \subset B$,即若 A 出现,则 B 必出现;从而,若 B 不出现,则 A 也不出现,即 $\bar{B} \subset \bar{A}$,故由(A)可以导出(B);设选项(B)正确,即 $\bar{B} \subset \bar{A}$,则 $\bar{B} = \bar{A}\bar{B}$,从而 $\overline{AB} = A\bar{A}\bar{B} = \emptyset$,故由(B)可以导出(C);设 $\overline{AB} = \emptyset$,则由 $A \subset B$ 可见 $A = AB + \overline{AB}$ 和 $B = AB + \overline{AB}$,可见

$$A+B = \overline{AB} + AB + \overline{AB} = B;$$

故由(C)可以导出(A);从而,事件 $A+B=B$ 与选项(A),(B)和(C)等价。

于是,由于是单项选择题,可知选项(D)与 $A+B=B$ 不等价,故只有选项(D)符合题目的要求,因而应该选(D)。

【例 1-6】 设 A, B 是任意二事件,则下列各选项中错误的选项是 ()

A. 若 $AB = \emptyset$,则 $\bar{A}, \bar{B}$ 可能不相容

B. 若 $AB \neq \emptyset$,则 $\bar{A}, \bar{B}$ 也可能相容

C. 若 $AB = \emptyset$,则 $\bar{A}, B$ 也可能相容

D. 若 $\overline{AB} \neq \emptyset$,则 $\bar{A}, B$ 一定不相容

分析 应该选(D)。宜采用直选法确定符合题目要求的选项;如果用排除法,则需要对其中三个选项分别举出反例。

(1) 直选法 对于选项(D)容易举出反例。设 $A \neq \emptyset, \bar{B} \neq \emptyset, A = \bar{B}$,则 $\bar{A} = B$ 。从而

$$\overline{AB} = A \neq \emptyset.$$

然而 $\bar{A}, B$ 显然相容: $\overline{AB} = B \neq \emptyset$,因此产生矛盾,故(D)确实是题目所指的错误选项,从而应该选(D)。

(2) 排除法 只需举例说明(A),(B),(C)可能成立,即不符合题意的错误选项。例如,若 A 和 B 互为对立事件,即 $B = \bar{A}$,则 $AB = \emptyset$,且也互为对立事件,因此 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 不相容,故选项(A)成立;

设 $AB \neq \emptyset$ 且 $A+B \neq \Omega$,那么假如 $\bar{A}, \bar{B}$ 不相容: $\overline{AB} = \emptyset$,则

$$A+B = \overline{AB} = \emptyset = \Omega$$

而这与 $A+B \neq \Omega$ 矛盾,可见 $\bar{A}, \bar{B}$ 也相容,从而选项(B)成立;

设 $\bar{A}, \bar{B}$ 不相容 $\overline{AB} = \emptyset$ 但 $A+\bar{B} \neq \Omega$,那么若 $\bar{A}, B$ 不相容 $\overline{AB} = \emptyset$,则 $A+\bar{B} = \overline{AB} = \emptyset$,这与 $A+\bar{B} \neq \Omega$ 矛盾,可见 $\bar{A}, B$ 也相容,从而选项(C)成立。

于是,(D)是符合题意要求的正确选项。

【例 1-7】 对于任意事件 A, B , 若 $A \subset B$, 则下列各等式不成立的是

()

A. $A + B = B$

B. $A - B = \emptyset$

C. $\overline{A} + \overline{B} = \overline{B}$

D. $A\overline{B} = \emptyset$

分析 应该选(C)。

(1) 直选法 由于 $A \subset B$, 可见 $\overline{A} \supset \overline{B}$, 因此

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A} \neq \overline{B}$$

故选项(C)不成立。于是, (C) 是符合题目要求的正确选项。

(2) 排除法 由于 $A \subset B$, 显然选项(A) 和(B) 成立; 因为

$$A\overline{B} = A(\Omega - B) = A - AB = A - A = \emptyset$$

因此选项(D) 也成立。于是, 只有选项(C) 不成立, 即(C) 是符合题目要求的选项。

【例 1-8】 对于任意事件 A, B, C , 若 $\overline{A+B} \supset C$, 则

()

A. $\overline{A} + \overline{B} \supset \overline{C}$

B. $\overline{A}\overline{B} \supset \overline{C}$

C. $A + B \subset \overline{C}$

D. $AB \subset C$

分析 应该选(C)。本题采用直选法比较简便。

(1) 直选法 因为, 由 $\overline{A+B} \supset C$, 可见 $A+B \subset \overline{C}$, 所以(C) 是正确选项。

(2) 排除法 容易证明选项(A), (B) 和(D) 不成立。事实上, 设 $A = B$, 由条件 $\overline{A} = \overline{A+B} \supset C$, 可见

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A} \supset C, AB = \overline{A+B} = A \subset \overline{C}$$

因此选项(A) 和(D) 都不成立; 其次由条件 $\overline{A+B} \supset C$, 可见

$$\overline{A}\overline{B} = \overline{A+B} \supset C$$

所以选项(B) 不成立。于是, (C) 是正确选项。

该题可以用概率的语言表述为: 对于任意事件 A, B, C , 若 $\overline{A+B} \supset C$, 则

A. $P(\overline{A} + \overline{B}) > P(\overline{C})$

B. $P(\overline{A}\overline{B}) > P(\overline{C})$

C. $P(A+B) < P(\overline{C})$

D. $P(AB) < P(C)$

那么, 利用上面的分析容易看到选项(C) 正确。

【例 1-9】 设 A 和 B 互为对立事件, 且 A 的概率不等于 0 或 1, 则下列各选项错误的是

()

A. $P(\overline{A}\overline{B}) = 0$

B. $P(AB) = 0$

C. $P(A+B) = 1$

D. $P(B|A) = 1$

分析 应该选(D)。因为 A 和 B 互为对立事件, 从而 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 也互为对立事件, 所以

$$A+B = \Omega, AB = \emptyset$$

$$\overline{A} + \overline{B} = \Omega, AB = \emptyset$$

(1) **直选法** 该题要求选出不成立的错误选项。由于 A 和 B 互为对立事件, 可见

$$P(B|A) = 0,$$

于是, 选项(D) 不成立, 即(D) 是符合题目要求的选项, 故应该选(D)。

(2) **排除法** 排除该题中不符合题目要求的选项。

由于 A 和 B 以及 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 都互为对立事件, 可见 $P(AB) = 0$ 和 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$, 故应排除选项(A) 和(B)。由于 $A + B = \Omega$, $AB = \emptyset$, 故 $P(A + B) = 1$, 可见选项(C) 也应排除。于是, 只有选项(D) 符合题目要求, 故应该选(D)。

【例 1-10】 设当事件 A 和 B 同时出现时事件 C 也随之出现, 则 ()

- A. $P(C) < P(A + B)$ B. $P(C) \geq P(A) - P(\bar{B})$
C. $P(C) > P(AB)$ D. $P(C) = P(AB)$

分析 应该选(B)。条件“当事件 A 和 B 同时出现时事件 C 也随之出现”即 $AB \subseteq C$ 。

(1) **直选法** 由条件知 $AB \subseteq C$ 。因此 $P(AB) \leq P(C)$, 从而

$$\begin{aligned} P(C) &\geq P(AB) = P(A) + P(B) - P(A + B) \\ &\geq P(A) + P(B) - 1 = P(A) - P(\bar{B}) \end{aligned}$$

于是, (B) 是正确选项。

(2) **排除法** 由条件知 $AB \subseteq C$ 。设 $A \subset C, B = \emptyset, AB = \emptyset \subset C$, 则

$$P(A + B) = P(A) \leq P(C)$$

从而选项(A) 不成立。设 $A = C, B = \Omega, AB = A = C$, 则

$$P(AB) = P(A) = P(C)$$

从而选项(D) 不成立。设 $AB \subset C, P(C - AB) > 0$, 则

$$P(C) = P(C - AB) + P(AB) > P(AB)$$

从而选项(C) 不成立。于是(B) 是唯一正确选项。

【例 1-11】 设 A, B 和 C 是任意三事件, 则下列各命题正确的是 ()

- A. 若 $A + C = B + C$, 则 $A = B$ B. 若 $P(A) = P(B)$, 则 $A = B$
C. 若 $A - B = A$, 则 $AB = \emptyset$ D. 若 $P(AB) = 0$, 则 $AB = \emptyset$

分析 应该选(C)。该题用直选法比较简便。

(1) **直选法** 由于

$$A - B = A - AB = A$$

可见 $AB = \emptyset$ 。于是, (C) 是正确选项。

(2) **排除法** 事实上, 为说明其余选项不成立, 只需分别举出反例。设 $C = \Omega, A \neq B$, 则

$$A + C = \Omega = B + C$$

但是 $A \neq B$, 从而选项(A) 不正确; 设随机变量 X 服从标准正态分布, 考虑事件 $A = \{X \geq 0\}, B = \{X \leq 0\}$, 则