科學圖書大庫

大專用書

統計學

譯者　林元興　　校閱　鄭堯栟

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

大專用書

統　計　學

譯者　林元興　　校閱　鄭堯柈

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧�　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十六年五月十六日五版

統　計　學

基本定價　3.00

譯者　林元興　國立政治大學副教授
校閱　鄭堯柈　國家科學委員會研究教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(63)局版臺業字第0116號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號 電話7813686 7815250號
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尙有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尚祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

目 錄

第一章 緒 論 …… 1

1-1 實 例 …… 1
1-2 歸納法與演繹法 …… 3
1-3 選樣的原因 …… 3
1-4 選樣的方法 …… 5

第二章 樣本敍述統計 …… 7

2-1 導 言 …… 7
2-2 次數表與圖形 …… 7
2-3 中心值（位置量數） …… 10
2-4 差異（離勢量數） …… 15
2-5 線型移轉（加碼法） …… 17

第三章 機 率 …… 26

3-1 導 言 …… 26
3-2 機率的基本性質 …… 28
3-3 事件與其機率 …… 29
3-4 條件機率 …… 39
3-5 獨立事件 …… 44
3-6 機率的其他研究觀點 …… 47

第四章 隨機變數及其分配 …… 51

4-1 間斷隨機變數 …… 51
4-2 平均數與變異數 …… 55
4-3 二項分配 …… 57

4-4 連續分配……………………………………… 61
4-5 常態分配……………………………………… 64
4-6 一元隨機變數的函數……………………………… 69
4-7 各種符號……………………………………… 71

第五章 兩元隨機變數……………………………… **77**

5-1 各種分配……………………………………… 77
5-2 兩元隨機變數的函數……………………………… 84
5-3 互變數………………………………………… 88
5-4 兩元隨機變數的線型混合………………………… 92

第六章 選 樣……………………………………… **104**

6-1 導 言………………………………………… 104
6-2 樣本和數……………………………………… 107
6-3 樣本平均數…………………………………… 108
6-4 中央極限定理………………………………… 114
6-5 由有限群體舉行不置回選樣……………………… 118
6-6 由貝奴里群體舉行選樣…………………………… 120
6-7 選樣理論摘要 ………………………………… 125

第七章 推 定(一)………………………………… **130**

7-1 導言:平均數的信賴區間………………………… 130
7-2 推定量應具備的各種性質………………………… 135
7-3 最概推定法(MLE)……………………………… 142

第八章 推定法(二)………………………………… **152**

8-1 均數差………………………………………… 152
8-2 小樣本推定法:t 分配…………………………… 154
8-3 推定群體比例:續論選舉問題…………………… 159
8-4 常態分配中變異數之推定方法:卡方分配……… 164

第九章 假設檢定…………………………………… **169**

9-1 單一假設之檢定………………………………… 169

9-2 複合假設……177
9-3 雙邊檢定與單邊檢定……186
9-4 假設檢定與信賴區間的關係……188
9-5 結　論……193

第十章　變異數分析……196

10-1 導　言……196
10-2 一因子變異數分析……196
10-3 二因子變異數分析……210

第十一章　迴歸緒論……221

11-1 實例介紹……222
11-2 擬定配合線應遵循的標準……223
11-3 最小平方解法……226
附錄 11-1　對 a 與 b 最小平方推定數的另外求法……232

第十二章　迴歸理論……235

12-1 數學模型……235
12-2 誤差項的性質……237
12-3 α 與 β 的推定……238
12-4 a 與 b 的平均數與變異數……238
12-5 高斯與馬可夫定理……240
12-6 a 與 b 的分配……242
12-7 β 的信賴區間與假設檢定……243
12-8 Y_0 的預測區間……246
12-9 外推法的危險……249
12-10 最概推定法……250
12-11 自變數的特性……255

第十三章　多元迴歸……256

13-1 實例介紹……256
13-2 數學模型……256
13-3 最小平方推定法……257

13-4 多元共線性……260
13-5 推定迴歸的判斷……264
13-6 虛變數……268
13-7 迴歸、變異數分析、與互變數分析……276

第十四章 相 關……285

14-1 簡相關……285
14-2 偏相關……306
14-3 複相關……308

第十五章 決策理論……312

15-1 先天與後天分配……312
15-2 最佳決策……315
15-3 統計推定其實就是一項決策……321
15-4 推定：貝氏法與古典法的比較……323
15-5 貝氏法的檢討……330
15-6 假設檢定亦即一項統計決策……331
15-7 博弈理論……338

附 錄……349

索 引……375

第一章　緒論

「統計學」(Statistics) 原係國家搜集人口與經濟資料的技術。嗣後却逐漸演變爲一種科學的分析方法，現已應用在各種社會科學與自然科學中，且形成數學的一種主要分支。現代統計學的目標與方法，可藉以下的實例予以說明。

1-1　實例

在外國每逢選舉總統前，各民意測驗機關都想推測誰會得勝；尤其是要預計各候選人的得票比例。如對全部選民一一普查，工作實過份繁重。唯一可行的辦法是調查少數的選民，期能由該等樣本（ sample ）中，推定群體（ population ）全部的資料，此即「統計推論」(Statistical inference）的典型實例：由樣本的（投票）比例以推論群體的（投票）比例。

各民意測驗機關咸認，這是一項冒險的工作。群體的正確投票比例，須俟選舉日所有選票均點計後方能揭曉。惟選取樣本（ sampling ）的方法如安排恰當，則樣本比例必與群體比例相近；故可由觀察的樣本比例 (P)，以推定未知的群體比例 π，其方式如下：

$$\pi = P \pm \text{誤差} \tag{1-1}$$

惟現有若干問題發生，譬如「誤差究有多大？」與「推測的正確性如何？」

因爲這個實例正是本書的精髓部份，故須引用第七章的用語嚴加說明（讀者嗣後自會獲得證明與全盤瞭解）。

選取樣本如按隨機（ random ）方式，且數目充份，則下列方程式必達 95 %的信賴程度 (confindence)，即

$$\pi = P \pm 1.96\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \tag{1-2}$$

其中 π 與 P 分別代表群體比例（population proportion）與樣本比例（

Sample proportion)，而n代表樣本數目(Sample size).

茲舉一實例以說明該公式之應用，設已選出1,000位選民，其中600位擬投票予甲黨推出之候選人。將0.60的樣本比例代入公式(1-2)，即得

$$\pi = .60 \pm 1.96\sqrt{\frac{.60(1-.60)}{1000}}$$

演算後約爲

$$\pi = .60 \pm .03 \tag{1-3}$$

故在95%的信賴程度下，投票予甲黨的群體比例應在0.57至0.63之間。

此即「信賴區間」(confidence interval)，而信賴區間之推定，係本書的一個主要研討題目。另外一個題目係「假設檢定」(test hypotheses). 舉例而言，得檢定乙黨候選人必贏得該次選舉之假設，惟根據方程式(1-3)的資料，一定會放棄該等假設，蓋由樣本調查的結果，甲黨占57%至63%，實居大多數，自應放棄乙黨得勝的假設。一般而言，信賴區間與假設檢定十分相近；以後由許多實例中自可看出其求法亦相同。

接着要對方程式(1-3)提出若干重要的說明：

1. 推定的結果並非完全正確；蓋只有95%的信賴程度。故有時也會發生錯誤——此即運氣不佳，抽出一組不妥的樣本所致。即使群體中贊成甲黨的人數不及半數，惟可能將大多數的甲黨人士選爲樣本，這種情形雖不常見，但一旦產生後，根據(1-3)所求的結論必大錯特錯。運氣不佳機會雖鮮，惟並非沒有發生的可能，故推定的結論僅有95%的信賴程度。

2. 樣本的數目如予增加，運氣的成份必隨之減少；調查的選民愈多，由乙黨居多數的群體中，選出甲黨占多數的樣本，機會愈少。故預測的結果愈爲精確。由方程式(1-2)中即可得證；蓋該式表示樣本愈增，則誤差愈小。現如將樣本增爲10,000位選民，且其中贊成甲黨的比例仍爲0.60，則95%的信賴區間必更爲精確：

$$.60 \pm .01 \tag{1-4}$$

3. 如有人認爲95%的信賴程度不夠理想。「應將推定結論的信賴程度提高至99%」。則有兩途可循。一是增加樣本的數目；此需增加調查費用與勞力，結果獲得之推定區間當與(1-4)同樣精確，惟却可提高信賴程度。如無法增加樣本的數目，則只有減少推定結論的精確性，俾提高信賴程度

——此即，將贊成甲黨人士的比例改爲：

$$.60 \pm .02$$

預測的精確性愈低，則其信賴程度愈高。在此範圍內，得採用二種辦法，以免產生錯誤的結論。一是將推定的精確性儘量放寬，以致永遠不會發生牴觸的現象（註一）。另一個辦法是將全部群體均列爲樣本（註二）加以調查；惟此非統計學的方法——僅係一種點計的工作，不必採用。一般的統計結論均附有若干不確定的程度。

I-2 歸納法與演繹法

圖 1-1 係表示歸納法與演繹法不同之處。歸納法（Induction）是將特殊的現象轉化爲一般的現象，（如由統計學而言）即由樣本推測群體。演繹法（Deduction）正好相反——由一般的現象轉化爲特殊的現象；即由群體求得樣本（註三）。方程式(1-1)即歸納法；因其係根據樣本比例以推測群體比例。惟此須事先着手演繹的問題。由方程式(1-1)中可以看出，如欲獲得歸納的結論（即群體比例可根據樣本比例加以推測），須先根據演繹的事實（即樣本比例可能與群體比例相近）。

本書第二章至第五章均屬演繹法。舉例而言，其中包括機率（probability），機率本身用途甚多（譬如應用在博奕理論 Game theory）；惟對本書第七章至第十章的統計歸納法貢獻更大。總之，前六章所要研究的是：「在既定的群體中，樣本的出現情形如何？樣本是否正合目標的需要？」須俟該等演繹問題解決後，方能進展至統計推論(Statistical inference)部份。故以後數章的研究問題轉變爲：「由觀察的樣本資料中，推測未知的群體資料，其精確性究有多大？」

I-3 選樣的原因

統計學中慣用選樣（譯者註：即選取樣本之簡稱）的方法，而不研究群全部，其原因有三：

(1) 資源匱乏（limited resources）.

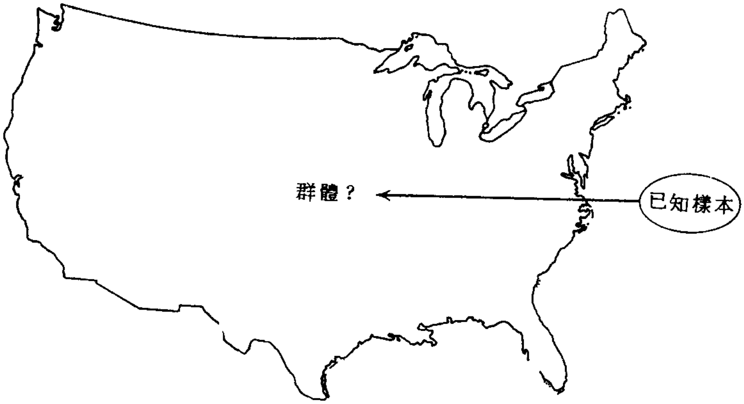
(2) 資料不足（limited data available）.

(3) 檢定方法對樣本具破壞性（destructive testing）.

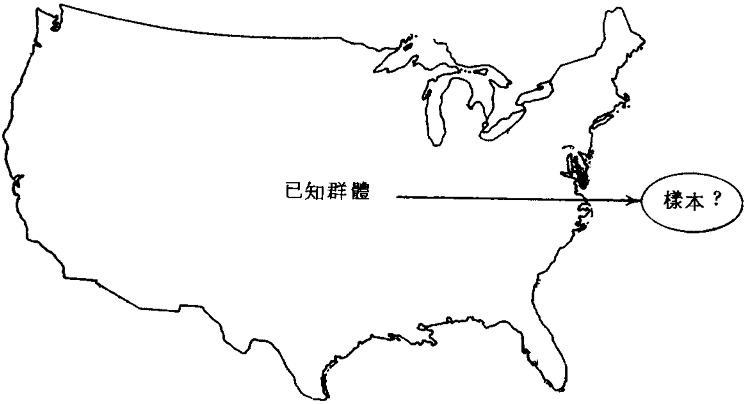
1. 資源總是不夠使用。譬如選情預測的實例，即無法籌措充裕的資金

，俾調查全部群體；但此非舉辦抽樣的惟一原因。

2. 有時花費大批費用，僅能獲得少數樣本。舉例而言，某人類學家欲證實甲、乙兩島的民族發展並無關連，且各具有獨特的體重、身高等徵狀。惟兩種民族無法完全加以比較。只能根據甲島現存50位居民與乙島現存100居民加以推測。故有時樣本數目早已固定，並非研究經費所能左右。



(a)



(b)

圖 1-1 歸納法與演繹法的比較 (甲) 歸納法 (統計推論) (乙) 演繹法 (機率)

工商業中亦有許多類似實例。設有一種自稱效率較高的機器，現擬依據檢定結果，決定是否添購一部。惟品質管制(quality control)人員實無法觀測該等機器生產的所有產品。僅得觀測少數樣本，再據以推測該機器效

率的高低。

3. 選樣工作可能係具破壞性的檢定。舉例而言，設某工廠現已生產一千個燈泡，且欲求其平均燃燒壽命。自然不能將燈泡全部燒壞爲止。

I-4 選樣方法

統計學與工商業或其他的行業，均須避免運氣不佳（bad luck）與處理不善（bad management）的情況。舉例而言，設有某人與你打賭一百元，認爲你擲一個骰子必得一點，否則包賠。若你接受，惟擲出骰子後竟得一點，故某人得勝。在此實例中，某人實處於處理不善的地位，却藉着絕佳好運以彌補其不利。惟一平反的辦法是要求繼續再玩，這次——當然要用自己的骰子。

如再觀察選情預測的實例，當可發現甲黨的樣本比例如含有以上任何一種不利情況（或兩者俱備），即不能精確代表群體比例。選取樣本的方法無論如何妥爲處理與設計，惟因運氣不佳，可能還會由乙黨居多數的群體中，抽出甲黨超過半數的樣本。方程式(1-2)正可說明這個情況；惟問題是選樣的運氣好壞，與處理方式無關。由該方程式得知，預防運氣不佳的最好辦法即「繼續再玩」；由統計學上而言，增加樣本數目，可以提高推定的可靠性

另一問題係選樣方法處理不善或有偏誤。舉例而言，如擬選取若干選民作爲樣本，自不能以電話名簿作爲群體，蓋窮人無法裝設電話，即無受調查的機會。

其他尚有許多選樣偏誤的實例，俯拾皆是，頗堪玩味。譬如在街上向行人調查意見即含有偏誤，蓋樣本泰半均爲溫雅有禮、衣著入時的人士；而粗魯的工人與辛勞的主婦却被忽略。民意代表也不能以所收到函件作爲選民的正確意見，蓋其較爲激進，其中尚包括一味孤行的人士與遊說份子。

正確選樣中最簡單的方法，係令群體中每一構成份子均有同等入選的機會。此即「隨機」（random）選樣的定義（註四）。選取樣本不能馬虎；應愼重設計。在某大都市街頭調查一千位人民的意見，即不能當作該國全體選民的隨機樣本。而應由全國東南西北普遍各選出若干。樣本如係隨機選出，方可免於偏誤（bias），且始能符合機率論（probability theory）的要求，並按方程式(1-2)的形式，進行科學化的推論。

有的問題僅具有非隨機樣本（nonrandom sample）。雖無法引用機率論，惟仍可作爲正確推測的依據——或可稱此爲「推論的技藝」(art of inference)。該等技藝雖甚重要，但無法在初等統計學中研討；故本書僅

就隨機樣本進行科學方法的推論。至於選樣方法擬留待第六章再作討論。

（註一）例如 $\pi = 0.50 \pm 0.50$

（註二）調查的對象較全部群體略少亦無不可。蓋計算當選人之得票，無須調查全部選民，只要其中一方贏得過半數即已足矣。（自然有些人在受調查時的意見，與在實際投票的態度並不一致，惟本書並不研究這種問題）。

（註三）拉丁文中，字首 ***in*** 係代表「歸向」（into or toward）之意，若由群體出發，則歸納法（***in***duction）係歸向群體。而字首 de 係表示「離去」（away from）之意。故演繹法（***de*** duction）係離去群體。總之，統計推論係根據歸納法。

（註四）嚴格地說，此應稱爲「簡單隨機選樣」（simple random sampling），爰因尚有較複雜的隨機選樣。

第二章　樣本敘述統計

2-1　導言

統計學的主要目的，旨在利用樣本以推論群體。惟最初須將樣本簡化，並縮減爲若干敍述性的數字（ descriptive numbers ），此稱爲樣本「統計量」(Statistic) （註一）。

在第一章的簡單實例中，該民意測驗機關若將一千位選民意見詳爲記載，必然獲得一串像甲甲乙甲乙……的字列，其中的甲或乙分別代表贊成甲黨或乙黨的人士。惟敍述該樣本的最佳方式，莫過於利用一個簡單的統計量 P 代表，P 即贊成甲黨的樣本比例；再據以推論 π，π 係群體比例。自然，該統計量之計算甚爲簡單。在前一章的實例中，計算樣本比例（0.60），僅須點計贊成甲黨的人數（600 位），再除以樣本數目（n ＝1,000 名)即可求得。

現擬另舉二例，以說明統計量的計算：

(甲) 一顆骰子連擲 50 次之結果。

(乙) 二百名男子之平均身高。

2-2　次數表與圖形

(甲)　間斷變數 (discrete varible亦可譯爲間斷變量)

如將骰子每次擲出之點數 X 詳爲記載，必得 1, 2, …6，等數字。X 稱爲間斷隨機變量（discrete random varible ），蓋其數值僅取有限個（或雖無限，但可數）。

一顆骰子連擲 50 次，即得 50 個數，如表 2-1 所列。

表 2-1　一顆骰子連擲 50 次之結果

6, 2, 2, 3, 5, 1, 2, 6, ... 4, 2.

接着利用表2-2，以劃「正」字記號的方法，將六種點數出現結果予以簡化。第三行係表示次數（frequency）f（或稱出現次數），譬如9即表示一點的出現次數；亦表其結果爲9/50．該項比例（0.18）即稱爲相對次數（relative frequency），以符號（f/n）表示；一併計算在第四行。

表2-2　骰子出現點數之次數與相對次數

(1) 點數	(2) 正字記號	(3) 次數 (f)	(4) 相對次數 (f/n)
1	正　正	9	.18
2	正　丅	12	.24
3	正　一	6	.12
4	正　下	8	.16
5	正　正	10	.20
6	正	5	.10

$\sum f = 50 = n$　　$\sum (f/n) = 1.00$

其中 Σf 表「所有 f 的總和」

第三行的資料稱爲「次數分配」（frequency distribution），並將其繪成圖2-1．第四行的「相對次數分配」（relative frequency distribution）亦可繪成同樣圖形；如詳爲觀察，該等圖形除縱軸的計算單位（vertical scale）有所差別外，其他一概相同。故將圖2-1的縱軸單位稍予變更，即變成相對次數分配。該圖直接顯示樣本的實驗結果。

(乙)　連續變數（continuous varible亦可譯爲連續變量）

設由某群體選出樣本二百名男子，以吋爲計算單位，將其身高逐一記載。最後目的旨在推論全部群體之平均身高；惟首先須簡化樣本資料並加敍述。

該實例中的身高（以吋計算），即隨機變數 X。在此情況下，X 係連續變量；蓋各人之身高可得任意值，例如63.328吋（註二）。現如觀察該特定值 X，並無意義；因爲不會再出現與64.328吋相等的身高。惟可將其記入某一組（class）或區（cell）內，即於表2-3第三行58.5吋至61.5吋間劃一記號。然後再將次數與相對次數按以上方式列成一表。

「區」得隨意制定，惟一般均遵照下列原則：

1. 區數不能過於繁瑣或過於簡略。