高中数学中的反例

马克杰　编

山东教育出版社

高中数学中的反例

马 克 杰 编

山东教育出版社

一九八八年·济南

高中数学中的反例
马克杰　编
*
山东教育出版社出版
（济南经九路胜利大街）
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本　9.75印张　206千字
1989年10月第1版　1989年10月第1次印刷
印数1—1,290
ISBN 7—5328—0492—5/G·399
定价 2.35 元

前　言

在数学中，要判断一个命题为真须要经过严格地证明，但要证明“若A则B”为假，只要找出（构造）一个反例即可。提出证明和构造反例在数学中具有同等重要的地位。

本书按照现行高中数学课本的章节顺序，根据高中生学习数学时容易出现的错误，对一些概念、定理、法则以反例的形式予以揭示，帮助读者正确地理解这些概念、定理、法则。为了进一步加深对知识的理解，书中还选择了一些典型错例加以分析，指出错误的症结和正确的解法，一反一正，观点鲜明，读者通过分析比较，必有收益。

全书共分代数、平面三角、立体几何、平面解析几何、微积分初步五篇，二十三章。各章所选反例力求既要少而精，突出重点，又要系统便于掌握，对教师和学生都有参考价值。

本书可作为高中学生的课外学习读物，也可作为高中教师的教学参考书。

李全业同志和金立柱同志对全书进行了仔细审核并作了部分修改，谨在此致谢。

书中的错点和不足之处，请读者批评指正。

编　者

一九八八年六月

目　　录

第一篇　代　数

第二篇　平面三角

第一篇 代　　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

§1　集　合

1.把具有某种属性的一些对象看作一个整体便形成一个集合.集合里的各个对象叫做集合的元素.

集合中的元素具有确定性的特征.即，设A是一个给定的集合，x是某一具体对象，则x是A的元素，或者不是A的元素.

例1　"聪明的学生"，"好心的人"，"难解的数学题"这类对象一般不能构成我们所说的集合，因为找不到一个明确的标准用以判别每一对象是否属于某个集合.

集合中的元素具有互异性的特征.即，属于一个集合的元素是互不相同的个体（或对象）.因此，同一个集合中不应重复出现同一元素.

例2　$\{2, 2, 4\}$不是集合的正确表示，因为其中出现了重复的元素2，应把它写成$\{2, 4\}$.

2.用描述法表示集合的一般形式为

$$\{x \mid P(x)\},$$

其中竖线前面的x表示集合的元素的一般形式，竖线后面的

$P(x)$表示元素x具有的公共属性。

例 3　写出不等式$5x+1<6x-2$的解集，并进行化简。

错解：不等式$5x+1<6x-2$的解集为

$$\{x|5x+1<6x-2\}=\{x>3\}.$$

以上结果是错误的.因为$\{x>3\}$表示以不等式$x>3$为元素的集合,而不能表示不等式$5x+1<6x-2$的解集。

正确答案是：不等式$5x+1<6x-2$的解集为

$$\{x|x>3\}.$$

上例说明，由于只写出集合的元素的公共属性$P(x)$（$x>3$），而未写出集合的元素的一般形式x，从而造成了将集合表述为$\{P(x)\}$型的错误。

例 4　写出方程组

$$\begin{cases} x+y=6, \\ y+z=4, \\ z+x=8 \end{cases}$$

的解集，并进行化简。

错解：所求的解集为

$$\left\{x\left|\begin{cases} x+y=6, \\ y+z=4, \\ z+x=8. \end{cases}\right.\right\}=\{5,1,3\}.$$

以上结果是错误的.因为在此例中,解集的元素的一般形式是有序三元实数组(x,y,z)，而不是实数x。不能把元素$(5,1,3)$写成5，1或3．

正确答案是：所求的解集为$\{(5,1,3)\}$。

例 5　设$A=\{$函数$y=\dfrac{1}{x^2-8x+15}$的定义域$\}$，$B=\{$绝对值不超过 1 的实数集$\}$，问A、B的描述形式是否正确？

分析：题中集合A和集合B的表述形式是错误的。因为集合A就是函数 $y=\dfrac{1}{x^2-8x+15}$的定义域，集合B就是绝对值不超过 1 的实数集。这样一来，题中集合A和集合B就可分别表示为“$A=\{A\}$”和“$B=\{B\}$”。由于元素与集合之间没有相等关系，所以此种“$A=\{A\}$”、“$B=\{B\}$”的等式是错误的。

正确的表述是：$A=\{x \mid \dfrac{1}{x^2-8x+15}$ 有意义$\}$，$B=\{x \mid |x|\leqslant 1\}$。

例 6　$\{$实数集$\}$，$\{R\}$，$\{$全体矩形$\}$，$\{$一切圆$\}$，$A=\{$坐标平面上以原点为圆心，以$r(r\geqslant 0)$为半径的圆上的所有点$\}$，$\{$空集$\}$等，其表示方法都是错误的。

3．由集合A中的部分元素组成的集合叫做集合的子集。这种说法不成立。

例 7　因为空集不含任何元素，而空集是任何集合的子集，所以上述说法对空集不成立。

例 8　因为对于任意集合A，A是A的子集，而上述说法与此相矛盾，所以上述说法不成立。

4．“任何集合都有真子集”的说法不成立。

例 9　空集没有真子集。

5．$A=\{y \mid y=f(x),\ x\in R\}$ 表示具有性质$y=f(x)$，$x\in R$的元素y的全体，而不是符合条件的x的全体。混淆了这

点就要出错误。

例10 已知集合$A=\{y|y=x^2-6x+12, x\in R\}$，集合$B=\{y|y=-x^2-2x+6, x\in R\}$，求$A\cap B$。

错解：$A\cap B=\{y|y=x^2-6x+12, x\in R\}\cap\{y|y=-x^2-2x+6, x\in R\}$

$$=\left\{y\left|\begin{matrix}y=x^2-6x+12,\\ y=-x^2-2x+6,\end{matrix}\right. x\in R\right\}=\phi.$$

以上结论$A\cap B=\phi$显然是错误的。此题中，集合A、B的元素是符合条件的y，而不是(x,y)。因此，$A\cap B$中的元素是符合给定条件的y，而不是由方程组$\begin{cases}y=x^2-6x+12,\\ y=-x^2-2x+6,\end{cases}$的解组成的集合。

正确解答应是：

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{y|y=x^2-6x+12, x\in R\}\cap\{y|y=-x^2-2x\\&\quad+6, x\in R\}\\&=\{y|y=(x-3)^2+3, x\in R\}\cap\{y|y=-(x+1)^2\\&\quad+7, x\in R\}\\&=\{y|3\leqslant y\leqslant 7\}.\end{aligned}$$

6.“和”与“或”在用描述法表示两个集合的并集时，经常用到。要注意它们的含义。

例11 已知$A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$，则$A\cup B=\{$锐角三角形或钝角三角形$\}$。其中的“或”字用得不对，应为：

$A\cup B=\{$锐角三角形和钝角三角形$\}$。

例12 已 知 $A=\{x|f(x)=0\}$，$B=\{x|g(x)=0\}$，则

$A\cup B=\{x|f(x)=0$和$g(x)=0\}$.其中“和”字用得不对。应为：

$$A\cup B=\{x|f(x)=0\text{或}g(x)=0\}.$$

§2 映射与函数

1.设A、B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合A到集合B的映射.

以上定义中，“任何”、“都有唯一”等词非常重要。

例1　设$A=D=\{$实数$\}$，对应法则f：

$a\to a$，若$a\neq1$；

$1\to b$，这里$b^2=1$.

不是一个集合A到集合D的映射.因为，这个f固然替每一个不等于1的a都规定了一个唯一的对应值，但不能决定b是1还是-1，也就是说，f没有替1规定一个唯一的对应值，这与定义不符。

例2　设$A=D=\{$正整数$\}$，对应法则f：$a\to a-1$.

不是一个A到D的映射。因为，这个f固然替每一个$a\neq1$规定了一个唯一的对应值$a-1$，但$a=1$时，$a-1\bar{\in}D$，也就是说，1在D中没有元素与它对应，这与定义不符。

例3　已知$A=\{$平面M内的点$\}$，$B=\{$平面M内的直线$\}$，对应法则f：

点$P\to$过P点的直线.

不是一个A到B的映射.因为，对于平面M内的每一点P，在平面M内过P点的直线有无限多条和P对应，所以，对于集合A中的每一元素，在集合B中都不是只有唯一的元素和它

对应.

例 4　已知$A=\{\alpha|0°\leqslant\alpha\leqslant180°\}$，$B=[0,1]$，对应法则$f:\alpha\to\cos\alpha$不是从$A$到$B$的映射.因为,当$90°<\alpha\leqslant180°$时，$\cos\alpha$的值在区间$[0,1]$之外，也就是说，这样的$\alpha$在$B$中没有元素和它对应.

说明：若f是集合A到集合B的一个映射，有两个必须要求：

（1）集合A的每一个元素,集合B都有元素和它对应；

（2）集合A的任一元素只能与集合B的唯一元素相对应.

还有两个不要求：

（1）集合A的元素对应完集合B的所有元素；

（2）集合B的任一元素只与集合A的唯一元素相对应.

2.如果在某变化过程中有两个变量x、y，并且对于x在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y都有唯一确定的值和它对应，那么y就是x的函数，x叫做自变量.自变量x的取值范围叫做函数的定义域；和x的值对应的y的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域.

由以上函数的概念知，函数是由定义域、值域以及定义域到值域上的对应法则三个要素组成的一类特殊的映射.函数的定义也可叙述如下：

设A、B都是非空的数的集合，f是从A到B的一个对应法则，那么A到B上的映射f：$A\to B$就叫做A到B上的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中$x\in A, y\in B$.原象集A叫做函数$f(x)$的定义域， 象集合B叫做函数$f(x)$的值域。

例 5 “一个变量随着另一个变量而变化，它们之间的关系就是函数关系”的说法不对。

例如，一块棉花地的产花量随着施肥量的变化而变化，但是，棉花产量不是由施肥量唯一确定的，所以产花量不是施肥量的函数。

又如，人的体重随着身高的变化而变化，但是，人的体重不是由身高唯一确定的，所以人的体重和身高变化的相依关系不是函数关系。

例 6 “如果y是x的函数，那么y随x的变化而变化”的说法不对。

例如，$y=\sin^2 x+\cos^2 x$，当x取不同值时，y有唯一确定的值与之对应，所以y是x的函数。但不论x取什么值，y的值始终不变（等于 1）。

又如，$y=(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$也是函数，但不论$x$取什么非负数，$y$的值始终保持不变（等于 2）。

再如，凸n边形诸外角和等于$2nd$与诸内角和$2(n-2)d$之差，即

$$T=2nd-2(n-2)d \quad (d=90^\circ).$$

显然，T是n的函数.但是，不论n取怎样的不小于 3 的整数，诸外角和T总等于$4d$。

说明：学习数学概念时，要抓住它的本质属性。y是x的函数，并不一定要求y随x的变化而变化。由以上反例看到：

对变量x的每一确定的值，变量y有唯一确定的值和它对

应，这才是函数概念的本质属性。

3.两个函数相等指：当且仅当(1)两个函数的定义域相同；(2)由自变量的数值确定因变量的数值的对应关系相同。

以上两个要素中只要有一个不同，则两个函数就是不同的函数。

例 7　函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与$y=x+1$不相等。这是因为，函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为$x\neq 1$的实数，而函数 $y=x+1$ 的定义域为全体实数，它们的定义域不同。

例 8　函数$f(x)=x$与$g(x)=\sqrt{x^2}$不相等。这是因为，尽管它们的定义域相同，均为$(-\infty,+\infty)$，但它们的对应关系不同。为便于比较，均写成分段函数形式：

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\geqslant 0), \\ x & (x<0). \end{cases}$$

$$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & (x\geqslant 0), \\ -x & (x<0). \end{cases}$$

由此可见，当$x<0$时，$f(x)$与$g(x)$的对应关系不同，所以，在$(-\infty,+\infty)$上，$f(x)$与$g(x)$是两个不同的函数。

在$[0,+\infty)$上$f(x)$与$g(x)$相等。

例 9　函数$f(x)=|x|+|x+1|$与函数$g(x)=2x+1$不相等。这是因为，它们的对应关系不同。事实上，

$$f(x)=|x|+|x+1|=\begin{cases} -(2x+1) & (x\leqslant -1), \\ 1 & (-1<x<0), \\ 2x+1 & (x\geqslant 0). \end{cases}$$

$$g(x)=2x+1=\begin{cases}2x+1 & (x\leqslant -1),\\ 2x+1 & (-1<x<0),\\ 2x+1 & (x\geqslant 0).\end{cases}$$

可见，当$x\in(-\infty,0)$时，$f(x)\neq g(x)$，故$f(x)$与$g(x)$不是同一个函数。

而在$[0,+\infty)$上，函数$f(x)$与$g(x)$相等。

§3　幂函数

1.函数$y=x^\alpha$叫做幂函数，其中x是自变量，α是常数。

并不是任意的一次函数和二次函数都是幂函数。例如，

$$y=x+1,\quad y=x^2+4x,$$

都不是幂函数。

2.对于幂函数$y=x^n$，当n是正分数时，设$n=\frac{p}{q}$（P，q是互质的正整数，$q>1$），则$x^n=x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$。

（1）当q是奇数时，x^n的定义域是$(-\infty,+\infty)$；

（2）当q是偶数时，x^n的定义域是$[0,+\infty)$。

以上关于p、p互质以及p、p奇偶性的规定不能忽视，否则就要出错误。

例1　运算$(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}$不成立。这里违反了$q$为奇数的条件，同时也违反了指数是既约分数的规定。

例2　运算$\sqrt[12]{x^3}+\sqrt[4]{y^2}=\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}$不成立。因为违反了指数是既约分数的规定，这里$\sqrt[4]{y^2}\neq\sqrt{y}$。

3.对于幂函数$y=x^n$，当n是负分数时，设$n=-\frac{p}{q}$（p、q

是质的正整数，$q>1$），则

$$x^n=\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}.$$

（1）若q是奇数，则x^n的定义域是$\{x|x\in R, 且x\neq 0\}$；

（2）若q是偶数，则x^n的定义域是$(0,+\infty)$。

类似于n为正分数的情况，忽略了p、q互质及奇、偶性的规定，在运算中就要出错误。

例3　试证伪论$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$。

证明：$\because x^{-\frac{2}{6}}=x^{-\frac{1}{3}}$，

即
$$\frac{1}{x^{\frac{2}{6}}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}},$$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

令$x=-8$，代入上式，得

$$\frac{1}{\sqrt[6]{(-8)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{-8}},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

这个反例告诉我们，应用数学公式和法则时，必须注意公式、法则的来源和它的适应范围。否则，拿到题目，不看对象，不问条件，盲目去套，就会出现错误。

4.幂函数$y=x^n$，当$n>0$时，在第一象限内是增函数；当$n<0$时，在第一象限内是减函数。

如果没有“第一象限内”的限制，以上性质不成立。

例4　比较$(-2.5)^{-\frac{5}{3}}$和$(-2.4)^{-\frac{5}{3}}$的大小。