集合论初步

言　川

山西人民出版社

[redacted]论[redacted]步

言

山西人[redacted]出版[redacted]太原并州路七号）
山西省新华[redacted]山西新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：3 $\frac{5}{8}$ 字数：75千字
1976年6月第1版 1976年6月太原第1次印刷
印数：1—140,000册

*

书号：7088·764 定价：0.28元

前　　言

研究数学就得考虑一些确定的对象，如数、点、图形等等。把任意一些确定的对象看成一个整体时，就是一个集合。

集合论是研究集合的一般性质的。从十九世纪末德国数学家康托儿（Georg Cantor，1845—1918）把有限集推进到无限集开始，不仅它本身形成了数学的一个独立分支，并且由于构成集合的对象的任意性，讨论的性质的普遍性，它很快就渗透到几乎所有的各个数学分支中，对数学产生了巨大的影响，成为整个现代数学的基础。

目前，集合论的一些基础内容已规定到我国中小学数学教学大纲中，成为中小学数学教学的一个必学课题，这不仅有利于加深对于中小学传统的数学内容的理解，而且也为进一步学习现代数学打下了必要的基础。

这本小册子介绍了集合论的一些基础知识，范围大致以我国中小学数学教学大纲试行草案所规定的内容为限。由于想使这本小册子能适应当前中小学数学教师业余进修自学与中学生课外阅读的需要，所以，内容的安排与讲解，就几乎是对所介绍的内容一个一个地详细地展开的，举例多，且尽量结合了中小学传统的数学内容，还在每节末安排了一定数量的习题。

由于水平有限，书中一定会有不少缺点与错误，希读者批评指正。

吉川

1978.3

目　　录

一、集合的概念

1. 集合与元素，属于关系∈

内 容 提 要

把一些事物作为一个总体时，就是一个集合，这些一个一个的事物都是集合的元素。

集合用大写字母表示，元素用小写字母表示。

集合A的元素a记作

$$a \in A \text{（读作}a\text{属于A）}.$$

元素b不是集合A的元素记作

$$b \overline{\in} A \text{（读作b不属于A）}.$$

集合、元素与它们之间的属于关系∈是集合论的基本概念，其他概念都可以从元素、集合与属于关系∈引导出来。

为方便起见，空集ϕ也当作一个集合，就是一个元素也没有的集合。

集合是由组成它的元素一意确定的，因此，由相同元素组成的集合是相等的。两集合A、B相等记作

$$A = B.$$

定义 集合的元素的个数有限时，叫做有限集；集合的元素的个数无限时，叫做无限集。

我们知道，一些学生可以组成一个小组或班级；若干张纸能钉成一个本子。在数学中，我们把由一些事物组成的整体叫做**集合**（简称**集**）；组成这个集合的每个事物叫做这个集合的**元素**（简称**元**）。

这里，对组成集合的事物是什么，并没有任何限制，这就是说，组成集合的事物是任意的，不管是什么事物，只要把它们当作一个整体，就是一个集合。例如：

这些事物是5个学生，这5个学生组成一个学习小组，这个学习小组就是一个集合；

这些事物是桌上的书，桌上的书就组成一个集合；

这些事物是数字1、2、3，这三个数字也组成一个集合；

这些事物是所有自然数，所有自然数组成一个集合，叫做**自然数集**；

这些事物是平面上的点，这些点就组成一个平面点集。

在集合的意义里，不仅对组成集合的元素是什么事物未加限制，而且对组成集合的事物的多少也没有任何限制。因此，组成集合的元素的个数可以是有限的，这样的集合叫做**有限集合**。例如，由三个数字1，2，3组成的集合是一个有限集合；由12的约数组成的集合也是有限集合，因为12只有1，12，2，6，3，4六个约数。一个集合的元素的个数不是有限的，这个集合就叫做**无限集合**。例如，所有自然数组成的自然数集就是一个无限集合；所有偶数组成的偶数集也是一个无限集合；12的倍数组成的集合也是一个无限集合；平面上的点集也是一个无限集合。

一个有限集合，由于它的元素是有限的，我们就能够把它的元素一个一个地摆出来。例如，把12的约数集的元素一

个一个地摆出来，就是：

1，2，3，4，6，12.

这是一个个的元素．把它们用大括号括起来，即

{1，2，3，4，6，12}，

我们就说给出了由1，2，3，4，6，12组成的集合，就是12的约数集．这样看来，大括号就体现了把1，2，3，4，6，12看成一个整体的作用．因此，大括号就是“由……组成的集合”的缩语．于是，大括号就读作“由……组成的集合”．这样，{1，2，3，4，6，12}就读作“由1，2，3，4，6，12组成的集合”．

试一试：

(1) 给出由数字1，2，3组成的集合；

(2) 给出48的约数集．

不过，用这种方法来给出集合，只适用于组成集合的元素为数不多时，元素一多，即使是有限集合，要一个一个地写出它的所有元素来，也是不方便的，甚至往往是不可能的．例如，按照这种方法，要给出红旗学校的全体学生组成的集合，就得把每个学生的名字都写出来．显然，这是很麻烦的．对于这种情况，我们就简单地用方式：

{红旗学校的全体学生}

来给出．这种给出集合的方法，对于无限集也是适用的．例如，自然数集就用

{全体自然数}

来给出．自然数集还可以这样给出：

{1，2，3，……}．

这是因为当我们看了1，2，3后，从1，2，3的变化规

律，就知道接下去自然是 4，5，6，等等。因此，就只须写出1，2，3 三个数来，而3后面的数就用删节号表示了。

试一试：

(1) 仿照上面的方法给出全体奇数组成的集合（叫做奇数集）；

(2) 仿照上面的方法给出偶数集。

我们这里讨论的集合，是康托儿意义下的集合。在康托儿意义下，一些事物组成一个集合时，这些事物就总有一种共同的属性与不属于这个集合的事物相区别。这就是说，属于这个集合的事物，就有这种共同的属性；不属于这个集合的事物，就没有这种共同的属性。这样，这种共同的属性就把所考虑的一切事物分成两部分，一部分就是属于这个集合的那些事物，一部分就是不属于这个集合的那些事物。因此，在康托儿意义下，对于一个集合来说，任意一个元素，只能或者属于这个集合，或者不属于这个集合，不能既属于这个集合，同时又不属于这个集合。

例如，对于 5 的倍数的集合，属于这个集合的元素有如下的共同性质：（1）是正整数；（2）能被 5 整除。这样，我们就可用这个共同的性质，来判别任意一个元素是否属于这个集合。事实上，对于一切不是正整数的元素，显然不属于这个集合；对于正整数，因为已具有性质（1），所以就看它是否能被 5 整除。能被 5 整除，就属于这个集合；不能被 5 整除，就不属于这个集合。

不要以为这种共同的属性必须是事物的本质属性。例如，桌上有三个茶杯、一本书、一支笔、几张纸，则桌上的

这些东西组成一个集合，那么这些东西就有一个共同的属性了，这个共同的属性不是别的，就是：在桌上。我们就用一个元素是否“在桌上”，来判别这个元素是否属于这个集合。尽管书架上的那本书，与桌上的那本书有本质相同的属性，但它却不能属于这个集合；尽管桌上的茶杯与桌上的那本书没有什么本质相同的属性，它们却都属于这个集合。

在康托儿意义下，也不考虑那些界限不清的集合（这样的集合，叫做不分明集合，是弗齐（Fuzzy）意义下的集合）。例如，个子高的人组成的集合。这样的集合，在康托儿意义下是不考虑的，因为我们无法判断例如高为1.72米的人是否属于这个集合。

因此，集合往往是采取给出组成集合的元素所具有的共同属性或所满足的共同条件的方式来给出。例如，所有大于2的（实）数组成的集合，可以这样给出：

$$\{x: x>2\},$$

这表示数x组成的集合，冒号后面的不等式$x>2$，表示数x所满足的条件。因此，括号内的“$x:x>2$”就写出了满足不等式$x>2$的一切x。

如果把x看成是数轴上的点时，$\{x: x>2\}$就表示数轴上点2右面的所有点组成的集合，就是：

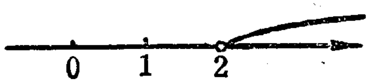


图1

类似地，

$$\{(x,y): x\geqslant2,\quad y>0\}$$

给出平面上画上阴影的部分的点集：

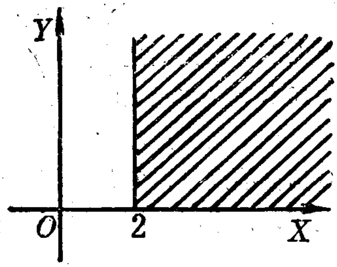


图2

事实上，(x, y)是平面上的点，冒号后面的不等式$x \geqslant 2$，$y>0$，表示点的横坐标x与纵坐标y所满足的条件。因此，括号内的“$(x, y): x \geqslant 2, y>0$”就写出了满足$x \geqslant 2$，$y>0$的一切点$(x, y)$。

同样，由方程$ax+b=0$的解组成的集合（叫做这个**方程的解集**），就写成：

$$\{x: ax+b=0\}.$$

显然，“$x: ax+b=0$”就表示满足$ax+b=0$的一切x。

由不等式$ax+b>0$的解组成的集合（叫做这个**不等式的解集**），就写成：

$$\{x \quad ax+b>0\}.$$

“$x \quad ax+b>0$”就表示满足$ax+b>0$的一切x。

试一试：

（1）给出所有小于、等于-2的实数组成的集合；

（2）给出方程$ax^2+bx+c=0$的解集。

实际上，集合$\{x: ax+b=0\}$只有一个元素，就是$-\frac{b}{a}$。

象这样，只有一个元素的集合，叫做**单元素集**。

象上面这样，不把每一个元素都写出来的方式给出的集合，有时甚至连一个元素也没有。例如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解组成的集合：

$$\{x: x^2+1=0\},$$

就连一个元素也没有。因为，方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内就没有解，所以上面括号中满足 $x^2+1=0$ 的 x 就没有。

这样，如果我们不引入没有元素的集合，则每当我们说及一个集合时，就得先检验它是否有元素存在。为了避免这样的麻烦，我们就把一个元素也没有的集合也当作集合，并叫做**空集**。例如，上面方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合就是一个空集。空集用 ϕ 表示。

显然，空集的元素的个数为 0。

一般，集合用大写拉丁字母表示，元素用小写拉丁字母表示。

对于集合 A 的元素 a，我们采用G.Peano的记号，记作

$$a \in A,$$

读作“a 属于 A”。

如果元素 a 不是集合 A 的元素，则记作

$$a \overline{\in} A,$$

读作“a 不属于 A”。

属于关系 $\in$ 是集合与元素之间的关系，因此，属于关系符号 $\in$ 的两边就分别是元素与集合。

三个茶杯杂乱地放置时，我们不易有三个茶杯组成一个整体的感觉；可是，当把三个茶杯放在一个茶盘内，就会使我们产生“这三个茶杯是一个整体”的感觉。而一个茶盘就

图 3

象一个圆（或封闭曲线）。这样，就启发人们用圆（或封闭曲线）来形象地描绘集合。这样的图就叫做文氏图（也叫欧拉图）。

从集合的意义可知，集合是由它的元素所一意确定的。因此，由相同的元素组成的集合就是相同的集合。例如，集合

$$A=\{1,2,3\}$$

与集合

$$B=\{2,1,3\},$$

尽管给出集合时的元素的顺序不同，但它们都是由相同的元素 1,2,3 组成的，所以它们是相同的集合。又如，集合

$$A=\left\{\frac{b}{a}\right\}$$

由一个元素$\frac{b}{a}$组成；集合

$$B=\{x:ax-b=0\}$$

是一元一次方程 $ax-b=0$ 的解集，也是由一个元素组成，集合A与B是由相同的元素组成的，所以它们是相同的集合。相同的两个集合A与B，记作$A=B$。

显然，$A=B$时，A的元素也必然是B的元素，且B的元素

也必然是A的元素。这就是说，$A=B$时，我们就能从 $a\in A$ 得到$a\in B$，且从$a\in B$得到 $a\in A$。

反之，如果能从 $a\in A$ 得到 $a\in B$，且从$a\in B$得到$a\in A$，则A 的元素也是B 的元素，且B的元素也是A的元素，这就是说A与 B 的所有元素相同，所以$A=B$。

最后，我们还要注意，一个元素 a 和由一个元素 a组成的集合(单元素集) $\{a\}$ 是不同的。事实上，由于组成集合的事物是任意的，因此，也可以把一些集合看作是元素，再组成新的集合。例如，由数字 1，2 组成集合 $A=\{1,2\}$，把集合A 看成一个元素，由它组成一个单元素集 $\{A\}$。这里，集合 $\{A\}$ 只有一个元素A，而$\{A\}$的元素A却有两个元素 1 与 2 。这个例子说明，一个元素与由一个元素组成的集合是不同的：一个是元素，一个是集合。

练 习 一

1. 举出几个集合的例子来。
2. 下面的集合中，哪些集合是有限集，哪些集合是无限集？
   奇数集　偶数集　12的倍数集　12的约数集
   负整数集　自然数集　所有三角形的集合
   能被 3 整除的数的集合　实数集
   方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的解集
3. 举出一些有限集与无限集的例子来。
4. 下面的有理数中，哪些属于整数集？哪些属于分数集？哪些属于正数集？哪些属于负数集？

$$-2 \quad +5 \quad \frac{1}{3} \quad 0.1 \quad -\frac{1}{3} \quad -1 \quad 5 \quad -0.8 \quad 0$$

5．把下面的方程中的一次方程组成一个集合：

$x+2=5$　　　　$3x-5y+2=0$

$2x+ay^2=b$　　　　$2x+2xy-4y=18$

6．把下面的有理数按正整数、负整数、正分数、负分数分成四个集：

3.8　$\frac{2}{3}$　$+8$　18　-2　$-\frac{1}{3}$　-0.01

1　-1　$7\frac{1}{2}$　24　$+1000$　$-\frac{2}{2}$

7．把下面整式中的同类项分别组成一个集合：

$$ax^2+2yx+2x^2+\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}ax^2+axy$$

8．把下面代数式分成整式与分式两个集合：

abc　$-2x^5$　$\frac{1}{2}$　$\frac{a+b^2}{2}$　$\frac{x+y^2}{a+b}$

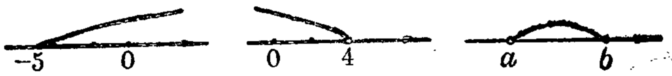
-15　$-t$　$\frac{x}{4}+2$　$18+\frac{b^2}{2}$　$ab+\frac{x}{2}$

9．给出下面的各个集合：

18的约数集　　正数的集合　　负数的集合

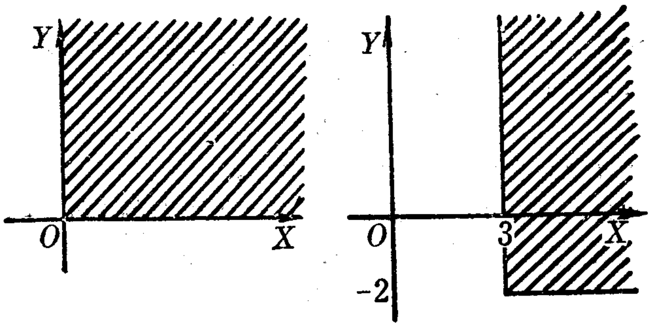
负整数的集合　　2 的倍数集

10．给出数轴上的点集：



（第10题）

11．给出阴影部分的点集：



（第11题）

12．给出下面不等式的解集：

$5x+2>15$ $\qquad$ $2x+3\geqslant 0$

$4x<2+5x$ $\qquad$ $-3+5\leqslant 0$

13．举出几个空集的例子．

14．下面的集合中，哪些集合是相同的集合：

$\{a,b\}$ $\quad$ $\{a,a\}$ $\quad$ $\{b,a\}$ $\quad$ $\{a\}$

$\{a^0\}$ $\quad$ $\{1\}$ $\quad$ $\left\{\dfrac{a}{a}\right\}$ $\quad$ $\{\sqrt{1}\}$

$\{x: x\quad 1=0\}$ $\quad$ 偶数集 $\quad$ 2 的倍数集

15．集合$\{0\}$与空集是否相同？

2. 子集，包含关系⊆

内容提要

定义 A、B 是两个集合，如果A的元素也都是B的元素，就说A是B的一个**子集**，记作

$$A\subseteq B,$$

读作"A包含在B内"或"B包含A"。

定义 如果$A\subseteq B$，且至少存在一个元素b_0：$b_0\in B$，但$b_0\overline{\in}A$，则说A是B的一个**真子集**，记作

$$A\subset B.$$

定理 包含关系⊆(⊂)具有传递性：

$$A\subseteq B,\ B\subseteq C\Longrightarrow A\subseteq C.$$

定理 $A\subseteq B,\ B\subseteq A\Longleftrightarrow A=B.$

定理 空集是任意一个集合的子集。

显然，三年二班的每个学生都是三年级的学生，这样，当我们把三年二班的学生看作是一个集合，三年级的学生也看作是一个集合时，就可以说，三年二班这个集合的每个元素就都是三年级这个集合的元素。同样，12的每个约数，也都是一个自然数，所以12的约数集的每个元素，就都是自然数集的元素。每个正偶数也都是一个自然数，所以正偶数集