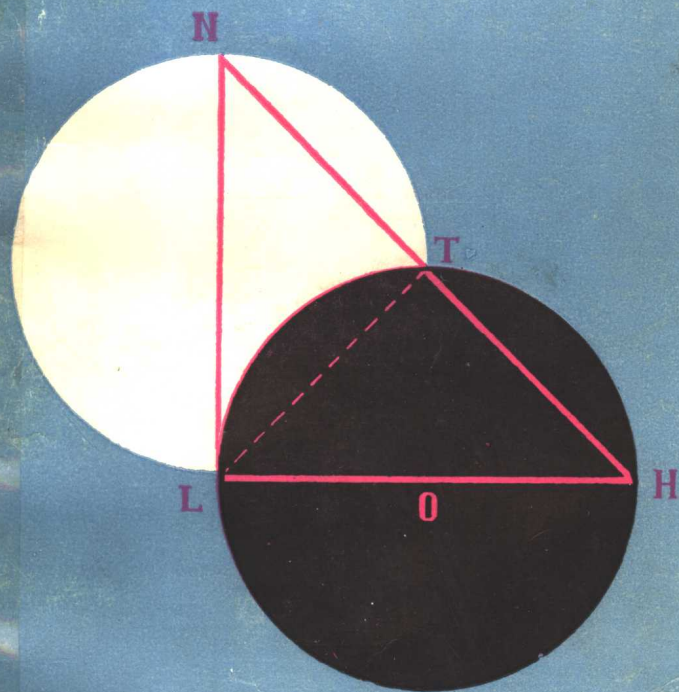


中学数学解题方法(下册)

ZHONGXUE SHUXUE JIETI FANGFA



河南教育出版社

中学数学解题方法

下 册

何履端 编

河南教育出版社

中学数学解题方法

(下册)

编者 何履端

责任编辑 温 光

河南教育出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米32开本 18.375印张 388千字

1985年6月第1版 1985年6月第1次印刷

印数1—12,940册

统一书号7356·54 定价 2.55 元

序 言

数学问题是多种多样的，是千变万化的。就其形式来说，可分为问答题、计算题、作图题和证明题等。要解决数学问题，不仅要有计算能力，还需要逻辑思维能力和空间想象能力。解答数学问题的过程，也是培养和发展这些能力的过程。教会学生解答习题，既可以巩固所学的知识，又可以启发学生的智力。因此对于解题方法的研究，是一个值得重视的问题。

目前，我国关于解题方法的书，内容丰富新颖者，为数不多。本书作者，据长期教学经验，选集了国内外的新颖题目，分门别类，作了解答，不但有传统的一般解法，有的还提出了更新的方法，引导读者解放思想，广开思路。本书还在大部分章节后，配置了习题，既便于学生自学也可供教师选用。

这本《中学数学解题方法》是中学数学教师和学生的好读物。

全国中学数学教学研究会理事长
陕西师范大学教授 魏庚人

1983年10月于陕西师大

前 言

中学数学各种解题方法，是数学的“双基”内容，熟悉和掌握各种解题方法，是提高解题能力的一种途径。因此，在加强“双基”教学之时，必须重视使学生掌握各种解题方法。长期以来我曾想：如能把数学解题方法汇编成册，给中学师生一本寻找解题方法的工具书，无疑对他们学习数学会起一定的促进作用。为此，十多年前我就开始积累资料，也曾几次准备编写，但总感到力不从心。

打倒了“四人帮”，全国掀起了向四个现代化进军的高潮，大好形势要求教育界为国家培养更多更好的人才。作为一个人民教师应该急国家之所急，想师生之所想。于是我大胆尝试，编写了这本“解题方法”，以求抛砖引玉。如果这本书还能对中学师生学习数学起一点有益的作用，将使我感到极大欣慰。

1982年，本书上册发行以来，得到广大师生热情鼓励，大家盼望早日见到本书下册。在同志们的鼓励和鞭策下，承蒙河南教育出版社的指导和支持，“解题方法”下册今天终于与广大读者见面了，实现了我多年的心愿。但由于时间短促，水平有限，错误和不妥之处肯定不少，希望同志们给予批评指正，使它逐步完善，成为一本较好的工具书。

我的老师、全国中学数学教学研究会理事长、陕西师大

数学系系主任魏庚人老教授，在百忙中为本书代写序言，在此，谨向魏教授深表感谢！

编写下册过程，我的挚友郑步南同志、章士藻同志提供宝贵意见，在此也一并致谢。

本书是“解题方法”汇编，书中有些方法和题目，是引用某些数学杂志和数学丛书的内容，在此谨向有关作者表示谢意。

全书分为上下两册，上册包括几何部分、代数部分、三角部分；下册包括集合、解析几何、概率、逻辑代数和微积分初步等部分内容。

何履端 写于福州师专

1983年10月

目 录

前言

第四章 集合部分 (1)

第一节 集合的表示法 (1)

一、字母表示法 (1)

二、列举法 (2)

三、描述法 (4)

四、文氏图表示法 (5)

第二节 集合的运算 (7)

一、定义确定法 (7)

二、公式法 (10)

三、文氏图示法 (12)

练习十二 (13)

第五章 平面解析几何部分 (15)

第一节 求曲线的方程 (15)

一、直接法(普通法) (15)

二、代入法(转移法) (22)

三、设参数法 (26)

四、待定系数法(公式法) (36)

五、复数法 (45)

六、向量旋转法 (49)

七、综合法	(54)
八、关键三角形法	(58)
练习十三	(60)
第二节 画方程的曲线	(63)
一、描点法 (代数法)	(63)
二、几何方法 (尺规作图法)	(68)
三、变换法	(74)
练习十四	(81)
第三节 解几问题的证明	(82)
一、解析法 (直接法)	(82)
二、参数法	(90)
三、待定系数法	(97)
四、变换法	(104)
五、综合法	(108)
六、特例确定法	(111)
练习十五	(114)
第六章 概率部分	(118)
一、直接计算法	(119)
二、间接计算法	(123)
练习十六	(127)
第七章 逻辑代数部分	(129)
第一节 逻辑式的化简	(130)
一、定义确定法	(130)
二、真值表法 (全代入法)	(132)
三、等值代换法 (等价法) (又分并项法、 吸收法、消去法)	(134)

四、配项法	(139)
五、对偶法	(140)
六、反演法 (对合法)	(143)
练习十七	(146)
第二节 逻辑恒等式的证明	(148)
一、真值表法 (全代入法、穷举法)	(148)
二、等值代换法 (等价法)	(150)
三、代值法	(151)
四、对偶法	(154)
练习十八	(155)
第三节 逻辑条件式的证明	(156)
一、真值表法	(156)
二、公式法	(158)
三、代值法	(160)
四、对偶法	(161)
五、反证法	(162)
练习十九	(164)
第八章 微积分部分	(165)
第一节 极限法	(165)
一、求数列的极限	(166)
基本法 (由 “ $\varepsilon-N$ ” 确定法)	(166)
代入法 (求值法)	(170)
《夹值》法 (逼敛法)	(177)
单调有界判别法	(181)
二、求函数的极限	(186)
由 “ $\varepsilon-\delta$ ” 确定法	(186)

代入法 (求值法)	(187)
《夹值》法	(190)
公式法	(195)
等价无穷小代换法	(199)
洛必达法	(202)
泰勒法	(208)
练习二十	(213)
第二节 微分法	(217)
一、直接求导法 (基本法)	(217)
二、间接求导法	(222)
三、复合函数求导法	(225)
四、反函数求导法	(228)
五、对数求导法	(230)
六、两边同时微分法	(231)
练习二十一	(234)
第三节 导数和微分的应用	(236)
一、求切线的斜率	(236)
二、求函数的变化率	(242)
三、确定函数的增减性	(244)
四、利用导数证明恒等式	(250)
五、利用导数作近似计算	(254)
练习二十二	(258)
第四节 积分法	(260)
一、导数逆算法	(261)
二、直接积分法	(263)
三、“凑”微分法	(268)

四、换元积分法	(271)
五、分部积分法	(275)
练习二十三	(279)
第五节 计算定积分的方法	(281)
一、直接计算法	(282)
二、牛顿——莱布尼茨法	(284)
三、定积分的换元法	(289)
四、定积分的分部积分法	(292)
练习二十四	(294)
第六节 定积分的应用	(295)
一、计算平面图形的面积	(295)
二、计算几何体的体积	(302)
三、计算曲线的弧长	(309)
四、计算旋转体的侧面积	(316)
练习二十五	(319)
附录一 算术中某些重要方法	(321)
一、近似数的取法	(321)
二、求质数的方法	(323)
三、合数分解质因数的方法	(325)
四、比例问题的解法	(327)
五、四则应用题解法	(331)
附录二 速算方法	(339)
一、数字观察法	(339)
二、查表法	(340)
三、凑整法——凑拾法	(341)

四、补数法	(343)
五、凑同法	(345)
六、换位法	(347)
七、连乘法 (分乘法)	(348)
八、连除法 (分除法)	(349)
九、短除法	(349)
十、拆开法	(350)
十一、公式法	(353)
十二、口诀法	(355)
附录三 验算方法	(359)
一、还原法	(359)
二、估值法	(361)
三、估位法	(362)
四、弃 9 法	(363)
五、弃 11 法	(367)
六、代值法 (求值法)	(370)
练习解答或提示	(373)

第四章 集合部分

集合是数学的一个基础概念。中学里是用描述性的方法来介绍集合的本质特征的。

我们把具有某种特征的一类事物的全体，叫做集合。这个全体里的每一个体，叫做这个集合的元素。

集合概念具有三个特性：确定性、互异性、无序性。

(1) 确定性：对于一个给定的集合，集合里的元素是确定的。这就是说，可以判断任何事物是或不是这个集合的元素。

(2) 互异性：一个元素在一个集合里不能重复出现。

(3) 无序性：在集合里，不考虑元素之间的顺序，只要元素完全相同，就认为是同一个集合。

第一节 集合的表示法

一、字母表示法

【意义】在研究集合时，为了方便起见，常用指定的一个字母表示一个集合。习惯上用大写拉丁字母 A 、 B 、 C 、 $\dots$ 、 X 、 Y 、 Z 等等表示集合，而用小写拉丁字母 a 、 b 、 c 、

…、 x 、 y 、 z 表示集合的元素。

一个事物 x 是集合 A 的元素，表示为 $x \in A$ ，读作 x 属于 A ；一个事物 y 不是集合 A 的元素，表示为 $y \notin A$ ，读作 y 不属于 A 。

【举例】

例 1 通常用 N 表示自然数的集合， J （或 Z ）表示整数的集合， Q 表示有理数的集合， R 表示实数的集合， C 表示复数的集合。

例 2 通常用 Z^+ 表示正整数的集合， Z^- 表示负整数的集合， R^+ 表示正实数的集合， R^- 表示负实数的集合。

例 3 规定用 ϕ 表示空集， I 表示全集， $\bar{A}$ 表示 A 的补集， $A-B$ 表示集合 A 与 B 的差集。

【说明】

(1) 有一些集合，表示它的字母，是集合论里统一规定的，如例 3，在各种集合论的书刊文献里，都统一使用这些字母表示。

(2) 另有一些集合，表示它的字母，各本书有各本书的规约，如例 1、例 2，是现行中学数学课本里使用的字母。但在同一本书里，使用的字母一经约定，则必须始终如一，以免发生混淆。

(3) 应该注意： a 和 $\{a\}$ 是不相同的， a 表示一个元素， $\{a\}$ 表示只有一个元素 a 的集合。

二、列举法

【意义】把集合里所有元素一一列举出来，写在大括号

内，用来表示集合，这种方法，叫做列举法。

【举例】

例 1 小于 6 的自然数组成的集合，可以表示为：{1, 2, 3, 4, 5}。

例 2 三种特殊的平行四边形组成的集合，可以表示为：{矩形，菱形，正方形}。

例 3 所有正偶数组成的集合，可以表示为：{2, 4, 6, ..., $2n$, ...}。

例 4 太阳系九大行星组成的集合，可以表示为：{水星，金星，地球，火星，木星，土星，天王星，海王星，冥王星}。

【说明】

(1) 列举法的优点是可以具体看清集合里的元素。

(2) 凡是有限集合，都可以用这种方法来表示。如例 1, 例 2。

(3) 可数集合也可以用这种方法来表示，其方法是在大括号内，列出可数集的一些元素，附以省略号，只要能足以说明此集合里包含哪些元素，不包含哪些元素就可以了。如例 3。

(4) 根据集合的无序性，用列举法表示集合时，无需考虑元素的顺序，如例 2 也可以表示为：{菱形，矩形，正方形}。

(5) 在一个问题中用什么方法表示集合，要看具体问题而定。只有几个元素组成的集合，显然用列举法表示比较直观。

三、描述法

【意义】把描述集合中元素的公共特征或规律，写在大括号内，用来表示集合。这种方法，叫做描述法。

【举例】

例 1 由2, 4, 6, 8, 10这五个数组成的集合，可以表示为： $\{ \text{不大于10的正偶数} \}$ 。

例 2 由所有的直角三角形组成的集合，可以表示为： $\{ \text{直角三角形} \}$ 。

例 3 由不等式 $2 < x + 2 < 3$ 的所有的解组成的集合，可以表示为： $\{x: 2 < x + 2 < 3\}$ 。

例 4 由方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的所有的解组成的集合，可以表示为： $\{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 。

例 5 在坐标平面里，由横坐标轴上所有的正整数点 $(n, 0)$ 组成的集合，可以表示为： $\{(x, y): x \in N, y = 0\}$ 。

【说明】

(1) 描述法的优点是能刻划出集合元素的共同特征。

(2) 本书用两点符号“:”把集合里的元素 x 与元素具有的特征性隔开，如例5。有的书上是用一条竖立的直线“|”隔开，这样，例5则表示成 $\{(x, y) | x \in N, y = 0\}$ 。

(3) 根据集合的确定性要求，用描述法表示集合时，写在括号里的“特征性”，必须能足够判定任一事物是否属于这一集合。

(4) 有限集（如例1，例4），可数集（如例5），不可数集（如例2、例3）都可以用描述法来表示。但在什么问题

中，用此描述法表示较好，则要看具体问题而定。

四、文氏图表示法

【意义】用平面上一条封闭曲线围出的面积块，或面积块里的小黑点，或在封闭曲线内画上（或写出）一个集合的所有元素，直观地表示集合，这种方法，叫做文氏图表示法。

【举例】

例 1 下面是用文氏图表示所有不大于 5 的质数组成的集合。

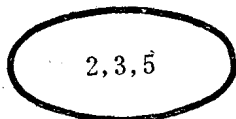


图 4-1

例 2 下面是用文氏图表示由所有三角形组成的集合。



图 4-2

例 3 用文氏图表示 $A = \{a, b, c, d\}$ 与 $B = \{b, d, e, f, g\}$ 的交集 $A \cap B$ 。

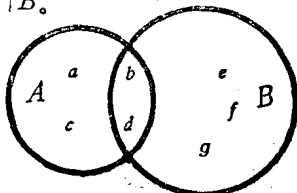


图 4-3