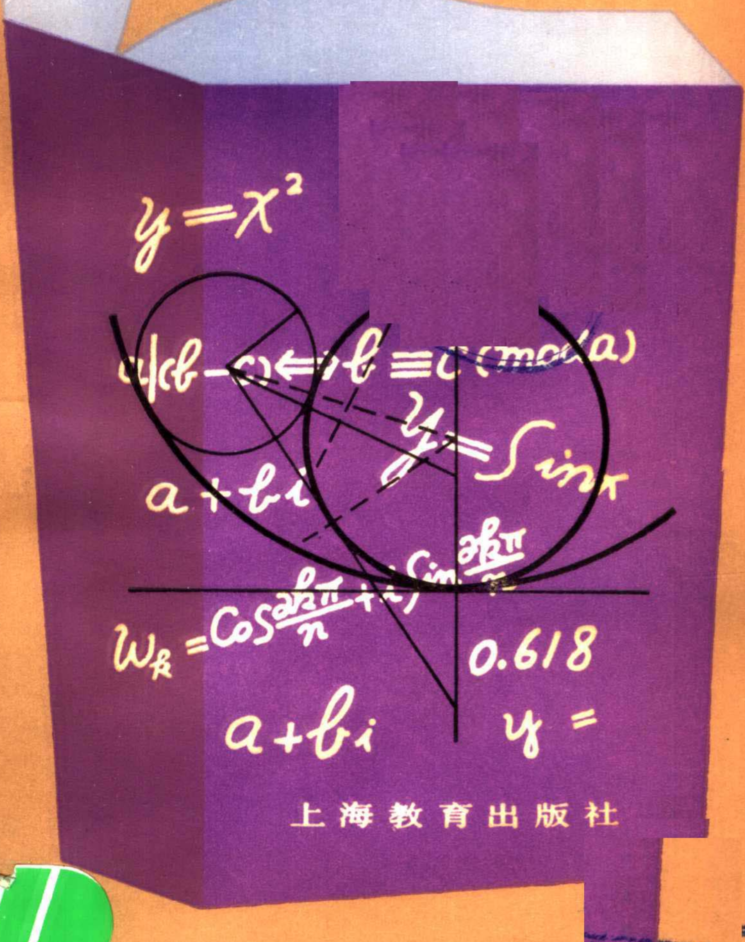
中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

# 奇数和偶数




上海教育出版社

文库

ZHONGXUESHENG WENKU

# 奇数和偶数

常庚哲　苏　淳

上海教育出版社

责任编辑　王文才
封面设计　范一辛

中学生文库　奇数和偶数
常庚哲　苏淳

上海教育出版社出版
(上海永福路 123 号)
新华书店上海发行所发行　江苏启东印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 2.875　插页 2　字数 58,000
1986 年 8 月第 1 版　1986 年 8 月第 1 次印刷
印数 1－13,900 本

统一书号：7150·3704　　定价：0.44 元

# 写在前面

小学生都知道：1, 3, 5, 7, …是奇数，2, 4, 6, 8, …是偶数. 全部整数可以分为两大类：奇数和偶数，凡是能被2整除的是偶数，不能被2整除的是奇数.

奇数和偶数各自都有一些特殊性质. 利用奇和偶的分类，利用它们的特殊性质，可以很方便、很迅速地求解一些数学问题，包括一些看上去比较难的题目. 这本书的主旨就是向读者介绍“奇偶性分析”在解数学题中的作用.

我们一直在努力，想使得这一本书的内容尽可能地浅显，让初中同学都能读得懂它的大部分. 现在可以说，这一要求基本上是达到了，除了最后几节谈到组合数时需要一点点高中代数的知识而外，大部分内容是初中学生能完全接受的. 除了少数几节，节与节之间的关联并不很大，读者既可以从头至尾地读下去，也可以只挑那些你所感兴趣的部分来读.

在本书的最后三节里，我们介绍了数的二进位制最基本的概念. 一方面，二进位制与奇数和偶数关系密切；更重要的是，它对电子计算机的产生有着关键的意义. 在这三节中，利用二进位制来作奇偶性分析，有时是很简洁、明快的.

本书没有介绍多少新的理论，只是通过大量的例子来展示解法的思路. 这些例子，大多数来自国内、外数学竞赛题，但是我们只对其中的少数注明了出处.

建议大家认真做一做书后的练习题. 虽然这些题目做起来并不都很容易, 但是只有通过自己的实践, 才能把书上介绍的方法变成自己的得心应手的工具.

感谢我们的同事、数学系副教授单墫博士的建议, 这些建议使本书增色不少.

作　者

1985年11月于

中国科学技术大学

# 目录

ZHONG XUE SHENG WENKU

# （一）奇数与偶数

小学生学习算术的时候，总是先从加法学起，而且首先学的是正整数的加法运算．所谓**正整数**，是指 1, 2, 3, …． 正整数也叫做**自然数**．

接着学习减法．学减法的时候，同学们认识了“零”——0．0 也是整数．再进一步，又认识了**负整数**：$-1$，$-2$，$-3$，…．

正、负整数再添上零，统称为**整数**．

常识告诉我们，整数可以分成两大类：**单数**和**双数**，也叫做**奇数**和**偶数**．$\pm1$，$\pm3$，$\pm5$，… 都是奇数，而 0，$\pm2$，$\pm4$，… 都是偶数．

奇数的特征是：它如果被 2 除，得余数为 1．这就是说，任何奇数都可表示成 $2n+1$ 的形式，这里 $n$ 是某个整数． 偶数的特征是：它可被 2 整除，也就是说，任何偶数都可表为 $2n$ 的形式．

这些知识可能不难学，也许不少初中一年级的学生早就掌握了．读者可曾想到，有许多看上去很难的数学问题，特别是一些趣味数学或者数学竞赛中的题目，只要对其中的数量关系作点简单的奇偶性分析，就能迎刃而解．

下面来看三个例子．

〔例 1〕 某班 49 位同学，坐成七行七列（在数学里，习惯于把横排叫“行”，竖排叫“列”）．每个座位的前、后、左、右的位

子都叫做它的“邻座”．要让这49位同学中的每一位都换到他的邻座上去，是不是能够办到？

乍看起来，这种交换座位应不成问题．因为每个人有三、四种换法可供选择，挑选的余地很大．但是，简单的奇偶性分析将明确地告诉我们：这样的换位根本不能实现！

用○与△两种记号表示坐成七行七列的49个同学(图1)．于是，换座位的要求就变得十分清楚了：凡坐在○位上的都必须换到△位上去；而坐在△位上的都应当换到○位上来．两种座位共49个(这是一个奇数)，可见两种座位中，有一种是奇数个，另一种是偶数个．这两个数连奇偶性都不同，自然不会相等．因此，可以断言，这种换位一定不会成功．

○ △ ○ △ ○ △ ○
△ ○ △ ○ △ ○ △
○ △ ○ △ ○ △ ○
△ ○ △ ○ △ ○ △
○ △ ○ △ ○ △ ○
△ ○ △ ○ △ ○ △
○ △ ○ △ ○ △ ○

图 1

在讨论例1的时候，利用了一个很显然的事实：奇数49只能是一个奇数加上一个偶数．这一点，可由下列三条结论中看出来：

奇数加奇数是一个偶数；

奇数加偶数是一个奇数；

偶数加偶数是一个偶数．

如果要用数学演算的方式来证明这些结论，那也是十分容易的．以证明第一条结论为例，两个奇数可以表为$2n+1$及$2m+1$，这里$n$，$m$都是整数．这两个奇数的和为

$$(2n+1)+(2m+1)=2(m+n+1),$$

由于$n+m+1$为整数，因此$2(m+n+1)$是偶数．这就证明了两个奇数的和是一个偶数．其他两条结论也可类似地证明．

仔细观察上述三条结论，可以看出：将一个奇数加到任一整数 $a$ 上去，就改变了 $a$ 的奇偶性；而将一个偶数加到任一整数 $a$ 上去，并不改变 $a$ 的奇偶性。

〔例 2〕 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{64}$ 是自然数 1, 2, …, 63, 64 的任意一种排列．令

$$b_1=|a_1-a_2|,\ b_2=|a_3-a_4|,\ \cdots,\ b_{32}=|a_{63}-a_{64}|,$$

$$c_1=|b_1-b_2|,\ c_2=|b_3-b_4|,\ \cdots,\ c_{16}=|b_{31}-b_{32}|,$$

$$d_1=|c_1-c_2|,\ \cdots,\ d_8=|c_{15}-c_{16}|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这样一直作下去，最后得到一个整数 $x$．求证：$x$ 为偶数．

下面介绍两种证法．

**证法一** 用反证法．假如 $x$ 是奇数，那么上述计算过程中倒数第二步里的两个数必然是一奇一偶(因为只有这样，才能减得一个奇数)．再往前推一步，得知倒数第三步里的四个数只能或是三奇一偶，或是一奇三偶，总之，只能是奇数个奇数．仿此推知，在计算过程中的每一步里，只能有奇数个奇数，连“初始状态”$a_1, a_2, \cdots, a_{63}, a_{64}$ 也不例外，但由于它们是 1, 2, …, 64 的某一排列，其中奇数的个数为 32 个，这是一个偶数．这就产生了矛盾，这个矛盾说明，最后一步得出的整数 $x$，只能是一个偶数．

**证法二** 应当认识两件事：第一，整数 $a$ 的奇偶性与其绝对值 $|a|$ 的奇偶性相同；第二，整数 $a$、$b$ 的和 $a+b$ 与其差 $a-b$ 的奇偶性相同，这是因为 $(a+b)+(a-b)=2a$ 是一个偶数，由本书第 2 页上的三条结论，即知 $a+b$ 与 $a-b$ 有相同的奇偶性．

由此可知，上述计算的第二步中，32 个数

$$|a_1-a_2|,\ |a_3-a_4|,\ \cdots,\ |a_{63}-a_{64}|$$

分别与下列 32 个数

$$a_1+a_2,\quad a_3+a_4,\quad \cdots,\quad a_{63}+a_{64}$$

有相同的奇偶性．这就是说，在只考虑奇偶性的时候，可以不注意绝对值符号，而且可以用“和”代替“差”．这样，可以把原来的计算过程改为

第一步：$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \cdots,\quad a_{61},\quad a_{62},\quad a_{63},\quad a_{64},$

第二步：$a_1+a_2,\quad a_3+a_4,\quad \cdots,\quad a_{61}+a_{62},\quad a_{63}+a_{64},$

第三步：$a_1+a_2+a_3+a_4,\quad \cdots,\quad a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64},$

……………

现在的问题是：要决定最后一步所得出的那一个整数的奇偶性．

很明显，最后那一个数是 $a_1+a_2+\cdots+a_{63}+a_{64}$ 由于 $a_1$，$a_2$，…，$a_{64}$ 是 1，2，…，64 的某一排列，因此它们的总和为 $1+2+\cdots+63+64=(64\times65)/2=32\times65$，这是一个偶数，因此 $x$ 也必须为偶数．

在讲述下一个例子之前，先得介绍一个名词．设想在一张平面上建立了一个直角坐标系．于是，平面上的每一个点都对应着一对有次序的实数 $(x, y)$，后者称为点的坐标．如果 $x$ 与 $y$ 全是整数，那么 $(x, y)$ 所表示的点称为“整点”．例如 $(-3, 2)$，$(0, -1)$，$(0, 0)$，$(5, 8)$ 等等，都是整点；而 $(\sqrt{2}, -3)$，$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$，$\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{5}\right)$ 等等都不是整点．

〔例 3〕 在平面上任意地给出五个整点．求证：其中必有两点，它们的联线的中点也是整点．

**证明** 只须对于点的两个坐标进行奇偶性分析，证明的途径就一目了然了．如果把每个点 $(x, y)$ 的两个坐标按奇偶

性分类，只能是如下四种情况之一：

(奇，奇)，(偶，偶)，(奇，偶)，(偶，奇).

由于给定了五个整点，因此其中至少有两点，它们的坐标的奇偶状况属于上述四类中的同一类，说得更清楚一些，就是必然有两点$(x_1, y_1)$与$(x_2, y_2)$，其中$x_1$与$x_2$有相同的奇偶性，$y_1$与$y_2$也有相同的奇偶性. 因此$x_1+x_2$与$y_1+y_2$都是偶数，它们都可以被2整除. 由“中点公式”，这两点的中点可表示为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

显然两个坐标都是整数，从而是一个整点.

在上面的推理中，我们说到，有五个整点，被分为四种类型，那么必至少有两个点属于同一类型，这犹如把五个苹果任意地放在四个抽屉之中，无论如何，至少有两个苹果会落入同一个抽屉. 这种推理的依据，称为**抽屉原则**，它是在解数学题时应用得相当广泛的一条原则. 想对抽屉原则有更多的了解的读者，可参看常庚哲著《抽屉原则及其他》(上海教育出版社，1978年). 需要说明的是，有的数学问题，特别是某些数学竞赛的题目，在同一个题目中，要多次用“抽屉原则”才能达到证题的目的. 下面的例子与例3紧密相关，但是要多次用到抽屉原则.

〔例4〕 平面上任给13个整点，求证：其中必存在四个整点，使得这四个点的几何重心也是整点.

有限个点的几何重心的两个坐标，分别是那有限个点的坐标的算术平均值.

**证明** 首先任取5个点，依例3，其中有两个点(记为$P_1$

与 $P_2$)，它们的中点还是整点. 除了 $P_1$、$P_2$ 之外，我们还有 11 个整点. 从中任取 5 个，依例 3，又可以找到两个点(记为 $P_3$ 与 $P_4$)，它们的中点还是整点. 除去 $P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$ 之外，我们还有 9 个整点，从中再选 5 个…. 用 5 次抽屉原则之后，我们得到两点 $P_9$ 与 $P_{10}$，它们的中点还是整点.

用 $Q_1$ 来记 $P_1$ 与 $P_2$ 的中点，由于 $Q_1$ 的各个座标分别是 $P_1$、$P_2$ 的对应坐标之和被 2 除，因此可以写为 $Q_1=(P_1+P_2)/2$. 此外，设 $Q_2=(P_3+P_4)/2$, $Q_3=(P_5+P_6)/2$, $Q_4=(P_7+P_8)/2$, $Q_5=(P_9+P_{10})/2$. 因此 $Q_i$(这里 $i=1, 2, \cdots, 5$)都是整点. 现在，对 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_5$ 再用一次抽屉原则，即再次应用例 3，从 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_5$ 中又可挑选两点，例如说它们是 $Q_2$, $Q_5$，它们的中点为整点，即

$$(Q_2+Q_5)/2$$

为一整点，也就是说

$$\begin{aligned}&[(P_3+P_4)/2+(P_9+P_{10})/2]/2\\&=(P_3+P_4+P_9+P_{10})/4\end{aligned}$$

为一整点. 这表明：$P_3$, $P_4$, $P_9$, $P_{10}$ 这四点的几何重心是一个整点. 证完.

## （二） 三角形的剖分

下面的例子叫人眼花缭乱，但奇偶分析可帮你理出头绪。

〔例〕 在一个三角形的内部，给定了若干个点。用一些直线段把其中的某些点联起来，或者把某些点与原三角形的顶点联起来，一直到这些直线段把原三角形分成了许许多多互不相交的小三角形为止。到这个时候，我们说得到了原三角形的一个“剖分”。我们规定，在联直线段的过程中，必须遵守以下两条原则：

1. 这些直线段不能相交，但是，两条直线段同以某个给定点为端点的情况是允许的；
2. 每一个给定点只能作为小三角形的顶点，既不能作为某个三角形的内部的点，也不能作为某个小三角形的非顶点的边界点。

求证：只要按上述原则对原三角形作剖分，那么剖分所得小三角形的数目必定是奇数。

**分析** 为了真正明白题目的含义，让我们从最简单的情况看起。也只有在这样做过之后，才能找到解决一般问题的方法。

如果在三角形内部给定零个点，即一个点也不给，这时无须联任何直线段，就得到了一个剖分，原来的三角形就是剖分中的唯一的三角形。

再看在三角形内部给定了一个点，这时只有如图 2 所示方式将三角形进行剖分．剖分中，含有三个小三角形，3 是一个奇数．

图 2

图 3

如果在三角形内部给定了两个点，那么，图 3 所示的就是一种符合规则的剖分．这个剖分中一共有五个小三角形，5 是一个奇数．

再看给定三个点，图 4 的剖分是合法的．这里一共有七个小三角形，7 也是奇数．如果给定的三个点共线，那么图 5 的剖分是合法的，它仍产生七个小三角形．

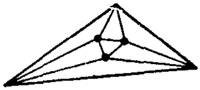


图 4

图 5

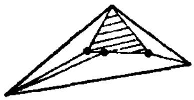


图 6

图 6 所表示的情形又怎样呢？在这个“剖分”中，共有六个小三角形．6 是偶数，是结论错了吗？不是！是这里的“剖分”不符合所说的原则．你看，在画有斜线的那个小三角形的底边上，除了两个点是顶点之外，还有一个点落在这条边内，这就违反了原则 2．

说到这里，我们才明白了什么是合法的剖分，什么是不合法的“剖分”．此外，还看到了问题的复杂性．题目中所说的若干点，可能是一个、两个点，也可能是成千上万个点．点数越多，联线的方式更是五花八门，剖分中的小三角形数目也越

来越大，再靠清点小三角形的数目来决定它的奇偶性，实际上是办不到的.

但是，如果我们学会了奇偶性的分析方法，这个题目就不难解决.

**证明** 设某一种合法的剖分中出现的小三角形的总数为 $n$，应当证明 $n$ 为奇数.

单独地看每一个小三角形，它有三条边，而 $n$ 个小三角形共有 $3n$ 条边. $3n$ 这个数字比实际的线段的数目要多，因为两个三角形的公共边被计算了两次. 很明显的是，在三角形内所联的每一条线段，只能为两个小三角形所共有，而原来三角形的三条边，不能为任何两个小三角形所共用. 所以把 $3n$ 减去 3，再除以 2，应当是大三角形内部线段的条数，现在用 $m$ 来记这个数，因此

$$(3n-3)\div 2=m,$$

或者说 $3n=2m+3=2(m+1)+1$. 这说明 $3n$ 是一个奇数，因此 $n$ 非是奇数不可. 这样就证完了要证的结论.

建议大家对于前面那些正确的剖分图形，数一数小三角形的数目 $n$ 以及内部线段的数目 $m$，看看这两个数目满足不满足关系 $2m+3=3n$.

在证明中，我们已经利用了以下几条很简单的知识：

奇数乘奇数还是一个奇数；

奇数乘偶数是一个偶数；

偶数乘偶数还是一个偶数.

简单地说：用奇数去乘整数 $a$，不会改变 $a$ 的奇偶性；而用偶数乘任何整数 $a$ 时，得到的总是偶数. 这些事实虽然至为明显，但巧妙地运用它们，将有很大的帮助.

## （三）不存在那样的多面体

由上两节所谈奇、偶数对于加法和乘法运算所产生的现象，还可以引伸出以下两条规律：

1．奇数个奇数的和一定是奇数；

2．如果有若干个整数的连乘积是奇数，那么其中的每一个因子都是奇数．

以上两条规律在解题时将经常被用到．

〔例1〕 设 $n$ 为一奇数．又设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列．求证：乘积 $(1-a_1)(2-a_2)\cdots(n-a_n)$ 一定是一个偶数．

**证明** 用反证法来证明．如果 $(1-a_1)(2-a_2)\cdots(n-a_n)$ 是奇数，那么由上述规律2，$1-a_1, 2-a_2, \cdots, n-a_n$ 应当都是奇数．再由规律1可知，它们之和应是奇数．但它们的和为

$$
\begin{aligned}
&(1-a_1)+(2-a_2)+\cdots+(n-a_n)\\
&\quad=1+2+\cdots+n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\
&\quad=1+2+\cdots+n-(1+2+\cdots+n)=0,
\end{aligned}
$$

却是一个偶数．这样就得到了矛盾．这个矛盾说明，假设 $(1-a_1)(2-a_2)\cdots(n-a_n)$ 是奇数是不对的，这就证明了这个乘积只能是偶数．

〔例2〕 $n$ 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 适合等式

$$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=n,$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=0,$$

求证：$n$ 一定是 4 的倍数.

**证明** 先证 $n$ 是偶数. 用反证法. 假如 $n$ 是奇数，由于 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_n$ 之积等于 $n$，它们每一个只能是奇数，因此它们之和也只能是奇数，这与 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ 矛盾. 这样，就证得了 $n$ 是一个偶数.

既然 $n$ 是偶数，由 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=n$ 即可得知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之中必至少有一偶数，不妨设 $a_1$ 是一个偶数. 如果只有 $a_1$ 为偶数，其余 $a_2$, $\cdots$, $a_n$ 均为奇数的话，此时 $a_2+a_3+\cdots+a_n$ 是奇数个奇数之和，仍为一奇数. 把 $a_1$ 加到这个和上去，仍得一奇数，这就说明 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 也是奇数，又与 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ 矛盾. 由此可见，除 $a_1$ 之外，其余的整数中至少还有一个偶数，或者说，$a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_n$ 中至少有两个偶数. 因此 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=n$ 中，包含着 4 作为因子，这就证得了 $n$ 一定是 4 的倍数.

〔例 3〕 $a$、$b$、$c$ 为整数，$a\neq0$，已知二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

有有理根，求证：$a$、$b$、$c$ 中，至少有一个是偶数.

**证明** 令 $x=y/a$，代入原方程的左边，得

$$\frac{y^2}{a}+\frac{b}{a}y+c=0.$$

用 $a$ 乘上式的等号两边，得

$$y^2+by+ac=0.$$

由于原方程有有理根，故最后这一关于 $y$ 的二次方程也有有理根. 设这有理根为 $q/p$，并且 $p$ 与 $q$ 是既约的（即 $p$ 和 $q$ 之