笃志图书

面向21世纪课程教材专用辅导

Reference Book for Mathematical Analysis

数学分析

同步辅导

上册 第三版

主编 同济大学应用数学系 彭舟
华东师范大学数学系 姬燕妮

- 考试大纲要求
- 教材内容归纳
- 重点难点剖析
- 典型例题解析
- 课本习题全解

航空工业出版社

面向21世纪讠[illegible]用辅导
Reference Book for Mathematical Analysis

数学分析

同步辅导

上册 第三版

主编 同济大学应用数学系 彭 舟
华东师范大学数学系 姬燕妮

- 考试大纲要求
- 教材内容归纳
- 重点难点剖析
- 典型例题解析
- 课本习题全解

航空工业出版社

内 容 提 要

本书是与由华东师范大学数学系编写、高等教育出版社出版的《数学分析(上、下册)》(第三版)同步配套学习辅导用书。该教材在全国师范类院校及其他类型学校数学专业使用尤为广泛，本书包括考试大纲要求、教材内容归纳、重点难点剖析、典型例题解析和课本习题全解等八大块内容，可供大学生学习《数学分析》时作为参考用书，也可供考研复习第一阶段使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析同步辅导/彭舟主编. 一北京:航空工业出版社,2005.7

ISBN 7-80183-623-5

Ⅰ.数… Ⅱ.彭… Ⅲ.数学分析一教学参考资料
Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 074732 号

数学分析同步辅导(上、下册)

Shuxue Fenxi Tongbufudao

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行电话:010-64978486 010-64919539

北京市燕山印刷厂 全国各地新华书店经售

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

开本:787×960 1/16 印张:39 字数:850 千字

印数:1—5000 上、下册定价:38.00 元

图书如有残缺情况，请联系 010—82742036 或 13501285859

前　言

本书是与华东师范大学数学系主编的《数学分析》(第三版)配套的指定参考用书，适合初次学习《数学分析》课程的大学生及准备报考硕士研究生的人员复习《数学分析》时使用。

数学分析是数学专业最重要的基础课之一，学好数学分析对学生完成从初等数学到高等数学的思想方法的飞跃有着重要的意义，同时这也是学习数学类、物理类等其他后续课程的基础。华东师范大学主编的《数学分析》(上、下册)一书严格遵循现行数学分析教学大纲要求，内容体系完整，难度适中，深受广大教师和同学欢迎。经过我们调查得知，由于数学分析课程本身的难度和课堂学时所限，同学们在学习之余急切地需要一本与教材相配套的课程辅导书。为了帮助广大同学学好数学分析，华东师范大学数学系和同济大学应用数学系根据多年的数学分析教学经验，广泛听取了不同高校老师和学生的意见，联合编写了这本《数学分析同步辅导》(上、下册)。

本书内容体系严格按照华东师大《数学分析》(第三版)教材编排。在具体内容上具有以下特点：

1. 在每章开始给出了大纲对本章各知识点的不同程度的要求，使学生在学习中做到有的放矢。

2. 知识内容表格网络化，更有利于同学提纲挈领，深刻地理解各部分内容之间的关系，从整体的角度掌握课本内容。

3. 在每节总结了课本主要内容之后，给出了在本节学习过程中应该注意的重点和难点，有助于学生加深对课程内容的理解。

4. 选取的例题既包括与基本概念有关的各种题型，又有综合多个知识点具有一定难度的综合例题，从基础到提高，适合各种水平的学生需要。

5. 给出了每节课后习题的全解，供学生作为解题参考。

《数学分析同步辅导(华东师大第三版)》(上下册)具有科学完整的体系，如果合理地使用本书，必将事半功倍。本书的出版，如果能对广大学生在数学分析的学习及复习中有所帮助，那将是对我们工作的最大肯定。

在本书的编写及出版过程中，北京笃志图书工作室给予了很大的帮助和支持，在此编者表示衷心的感谢。

由于时间仓促和水平所限，恳切希望广大读者和专家对本书的缺点错误给予批评指正。

编　者

二〇〇五年八月

目　　录

第一章　实数集与函数

本章大纲要求

1. 掌握实数的概念及其性质
2. 理解数集与邻域的概念，掌握有界集及确界的定义和确界原理
3. 理解函数的概念，掌握函数的表示法及其有界性、单调性、周期性和奇偶性
4. 掌握基本初等函数的性质和图形，理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念

本章知识结构图

- 实数集与函数
  - 实数、数集与确界原理
    - 实数
      - 实数及其性质
      - 绝对值与不等式
    - 数集与确界原理
      - 区间与邻域的概念与性质
      - 确界原理
        - 有界集
        - 确界
        - 确界原理
  - 函数
    - 函数概念
      - 函数的定义及表示法
      - 函数的四则运算
      - 复合函数
      - 反函数
      - 初等函数
    - 函数性质
      - 有界性
      - 单调性
      - 奇函数和偶函数
      - 周期函数

第一节 实 数

一、基本内容

表 1－1 实数的定义

名 称	定 义
实 数	可用分数 $\frac{p}{q}$(p、q 为整数,$q \neq 0$)表示的数称为有理数;而无限十进不循环小数称为无理数,有理数和无理数统称为实数
不足近似和过剩近似	设 $x = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ 为非负实数.称有理数 $$x_n = a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n$$ 为实数 x 的 n 位不足近似,而有理数 $$\overline{x_n} = x_n + \frac{1}{10^n}$$ 称为 x 的 n 位过剩近似,$n = 0,1,2,\cdots$ 而对于负实数 $x = - a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$,其 n 位不足近似与过剩近似分别规定为 $$x_n = - a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n - \frac{1}{10^n}$$ 与 $$\overline{x_n} = - a_0 . a_1 a_2 \cdots a_n$$

表 1－2 实数的性质

实数的性质	1. 实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算是封闭的,即任意两个实数的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是实数. 2. 实数集是有序的,即任意两实数 a、b 必满足下述三个关系之一:$a < b$,$a = b$,$a > b$. 3. 实数的大小关系具有传递性,即若 $a > b$,$b > c$,则 $a > c$. 4. 实数具有阿基米德性,即对任何 a、$b \in \mathbf{R}$,若 $b > a > 0$,则存在正整数 n,使得 $na > b$. 5. 实数集 $\mathbf{R}$ 具有稠密性,即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数也有无理数. 6. 实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点有着一一对应的关系.

表 1－3 绝对值的定义与性质

名 称	内 容
定 义	对实数 a,称 $$\mid a \mid = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$ 为 a 的绝对值.从数轴上看,$\mid a \mid$ 就是点 a 到原点的距离.

性　质	1. $\lvert a\rvert=\lvert -a\rvert\geqslant 0$；当且仅当 $a=0$ 时 $\lvert a\rvert=0$ 2. $-\lvert a\rvert\leqslant a\leqslant\lvert a\rvert$ 3. $\lvert a\rvert<h\Leftrightarrow -h<a<h$；$\lvert a\rvert\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h(h>0)$ 4. 对任何 $a,b\in\mathbf{R}$ 有如下的三角不等式 $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\leqslant\lvert a\pm b\rvert\leqslant\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$ 5. $\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\lvert b\rvert$ 6. $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}(b\neq 0)$

二、重点难点

第一节实数及绝对值的相关概念及性质我们在中学阶段均已接触过，只是那时尚未对一些性质做进一步讨论，如实数的阿基米德性及稠密性等，在本节的学习中我们应着重注意对学过的知识的系统归纳和总结，从更新的高度理解实数.

三、典型例题分析

例 1. 证明：对任意 $x\in\mathbf{R}$，存在唯一的整数，记为$[x]$，使得$[x]\leqslant x<[x]+1$. 这里称$[x]$为 x 的整数部分.

证明　先证存在性：

若 $0\leqslant x<1$ 时，则取$[x]=0$，有$[x]\leqslant x<[x]+1$.

若 $x\geqslant 1$，根据实数的阿基米德性质，存在正整数 N，使得 $x<N$，令 $E=\{n\mid x<n,n\text{ 为正整数}\}$，则 $E\neq\varnothing$，因为 $N\in E$，因此 $n_0=\min E$ 存在且有 $n_0-1\leqslant x<n_0$. 令$[x]=n_0-1$，则$[x]\leqslant x<[x]+1$. 若 $x<0$，则 $-x>0$，由上面所证，存在正整数$[-x]$使得

$$[-x]\leqslant -x<[-x]+1$$

所以

$$-([-x]+1)<x\leqslant -[-x]$$

当 $x=-[-x]$ 时，$-[-x]\leqslant x<-[-x]+1$. 令$[x]=-[-x]$，则

$$[x]\leqslant x<[x]+1$$

当 $x<-[-x]$ 时，则 $-[-x]-1<x<-[-x]$. 令$[x]=-[-x]-1$，则

$$[x]<x<[x]+1$$

综上，存在性成立.

再证唯一性：

设 n,m 都为整数且 $n\leqslant x<n+1,m\leqslant x<m+1$，那么

$$-(m+1)<-x\leqslant -m$$

由此得

$$n-(m+1)<0<n+1-m$$

即

$$n-m-1<0<n-m+1$$

得
$$-1<m-n<1$$
由此得 $m-n=0$,即 $m=n$.

例 2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $||x+1|-|x-1||<1$;　　　　(2) $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$

解　(1) 先对不等式两端平方并化简得
$$x^2+\frac{1}{2}<|x^2-1|$$
即
$$x^2-1>x^2+\frac{1}{2}\quad 或\quad x^2-1<-(x^2+\frac{1}{2})$$
显然前者不可能,故
$$x^2-1<-(x^2+\frac{1}{2})$$
解得
$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$
如图 1－1.

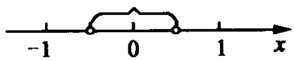

图 1－1

(2) 令 $x-2=t$,则得
$$|t+4|+|t|\leqslant 12\quad 或\quad |t+4|\leqslant 12-|t|$$
两边平方,化简得
$$3|t|\leqslant 16-t$$
再对上式两端平方得
$$t^2+4t-32\leqslant 0$$
于是
$$-8\leqslant t\leqslant 4$$
即
$$-6\leqslant x\leqslant 6.$$
如图 1－2.

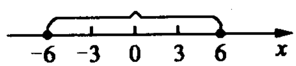

图 1－2

例 3. 设实数 a,b 满足 $|a|<1$, $|b|<1$. 证明不等式

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

证明 要证明的不等式等价于

$$-1<\frac{a+b}{1+ab}<1$$

即同时有

$$1-\frac{a+b}{1+ab}>0 \quad 与 \quad 1+\frac{a+b}{1+ab}>0$$

由条件 $|a|<1$, $|b|<1$,易见 $1+ab>0$. 故上述两式分别等价于

$$1+ab-a-b>0 \quad 与 \quad 1+ab+a+b>0$$

即 $(1-a)(1-b)>0$ 与 $(1+a)(1+b)>0$,而这两式显然成立,因此命题成立.

四、课本习题全解

1. **证明** (1) 若 $a+x$ 是有理数,则 $(a+x)-a=x$ 也是有理数,这与 x 是无理数矛盾,故 $a+x$ 是无理数.

(2) 若 ax 是有理数,当 $a\neq 0$ 时,$\frac{ax}{a}=x$ 是有理数,这与 x 是无理数矛盾,故 ax 是无理数.

2. **解** (1) 因为

$$\begin{cases}x>0,\\ x^2-1>0,\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x<0,\\ x^2-1<0,\end{cases}$$

前一个不等式组的解集是 $A=\{x\mid x>1\}$,后一个不等式组的解集是 $B=\{x\mid -1<x<0\}$,所以解集是 $A\cup B$.

(2) 因为 $\left|\frac{x-1}{x-3}\right|<1$,于是 $\left|1+\frac{2}{x-3}\right|<1$,故 $0<\frac{1}{3-x}<1$,则 $3-x>1$,$x<2$. 解集为 $(-\infty,2)$.

(3) 因为 $\sqrt{3x-2}\geqslant 0$, $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant 0$,平方得

$$x-1+2x-1-2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\geqslant 3x-2$$

因此有 $2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\leqslant 0$,所以 $\sqrt{(x-1)(2x-1)}=0$,即 $x=1$,或 $x=\frac{1}{2}$,但检验发现 $x=1$ 和 $x=\frac{1}{2}$ 均不符合原不等式,所以解集为 $\varnothing$.

3. **证明** 假设 $a\neq b$,则有 $a>b$ 或 $a<b$. 不妨设 $a>b$,令 $\varepsilon=a-b>0$,则 $|a-b|=a-b=\varepsilon$,这与 $|a-b|=a-b<\varepsilon$ 矛盾,从而必有 $a=b$.

4. **证明** 因为 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号,所以

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2\sqrt{|x|\cdot\frac{1}{|x|}}=2$$

当且仅当 $|x|=\frac{1}{|x|}$,即 $x=\pm 1$ 时取等号.

5. **证明** 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)-(x-2)|=|1|=1$;

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant|x-1|+|x-3|\geqslant|(x-1)-(x-3)|=2$.

6. **证明** 只需证$(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})^2\leqslant(b-c)^2$ 即可.这等价于证

$$2a^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\leqslant-2bc,$$

只需证

$$(a^2+bc)^2\leqslant(a^2+b^2)(a^2+c^2),$$

即证 $2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$. 由于 $a、b、c\in\mathbf{R}^+$,所以 $2bc\leqslant b^2+c^2$,$a^2>0$,所以有 $2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$ 成立.因而原不等式成立.

它的几何意义为:当 $b\neq c$ 时,平面上以点 $A(a,b)$、$B(a,c)$、$O(0,0)$ 为顶点的三角形中,$||AO|-|BO||<|AB|$;当 $b=c$ 时,图形为以点 $O(0,0)$,$A(a,b)$ 为端点的线段.

7. **证明** 因为 $x>0,b>0,a\neq b$,且

$$1-\frac{a+x}{b+x}=\frac{b-a}{b+x},\quad \frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$$

所以当 $a>b$ 时,$1<\dfrac{a+x}{b+x}<\dfrac{a}{b}$;当 $a<b$ 时,$\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+x}{b+x}<1$,因而$\dfrac{a+x}{b+x}$介于 1 与$\dfrac{a}{b}$ 之间.

8. **证明** 反证:假设$\sqrt{p}$为有理数,于是存在正整数 $m、n$,使$\sqrt{p}=\dfrac{m}{n}$,且 m 与 n 互质.则 $m^2=pn^2$,可见 n 能整除 m^2.故存在整数 $u、v$ 使 $mu+nv=1$,则 $m^2u+mnv=m$.由于 n 既能整除 m^2u 又能整除 mnv,故能整除其和,于是 n 能整除 m,这样 $n=1$,所以 $p=m^2$.这与 p 不是完全平方数相矛盾,故$\sqrt{p}$ 是无理数.

9. **解** (1) 根据原不等式,有$\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|=\left|\dfrac{b-a}{x-b}+1\right|<1$,因此有$-1<\dfrac{b-a}{x-b}+1<1$,即$0<\dfrac{a-b}{x-b}<2$,所以

$$\begin{cases}x>b,\\0<a-b<2x-2b,\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}x<b,\\2x-2b<a-b<0.\end{cases}$$

故当 $a>b$ 时,不等式的解为 $x>\dfrac{a+b}{2}$;当 $a<b$ 时,不等式的解为 $x<\dfrac{a+b}{2}$;当 $a=b$ 时,不等式的解集为 $\varnothing$.

(2) 由原不等式可得

$$\begin{cases}x>b,\\b-x<x-a<x-b,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x>b,\\a>b,\\x>\dfrac{a+b}{2}\end{cases}$$

故当 $a>b$ 时,不等式的解为 $x>\dfrac{a+b}{2}$;当 $a\leqslant b$ 时,不等式的解集为 $\varnothing$.

(3) 当 $b\leqslant0$ 时,原不等式的解集为 $\varnothing$.

当 $b>0$ 时,由原不等式得:$a-b<x^2<a+b$.因此当 $a+b\leqslant0$ 时,解集为空集;当 $a+b>0$ 时,如果 $a\geqslant b$,则解为 $\sqrt{a-b}<|x|<\sqrt{a+b}$,即

$$\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}\ \text{或}\ -\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b};$$

如果 $|a|<b$,则解为 $|x|<\sqrt{a+b}$,即

$$-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}.$$

第二节　数集·确界原理

一、基本内容

表 2－1　区间与邻域的定义

名　称	定　　义
有限区间	设 a、$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为开区间，记作 (a,b)；数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$；数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间，分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.
无限区间	设 $a\in\mathbf{R}$，记数集 $\{x\mid x\geqslant a\}$ 为 $[a,+\infty)$. 类似的有， $\{x\mid x\leqslant a\}=(-\infty,a]$，$\{x\mid x>a\}=(a,+\infty)$ $\{x\mid x<a\}=(-\infty,a)$，$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=(-\infty,+\infty)$ 以上区间均称为无限区间
邻　域	设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$ 称满足 $\mid x-a\mid<\delta$ 的全体实数 x 的集合为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a;\delta)$，即 $U(a;\delta)=\{x\mid\mid x-a\mid<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$ 而点 a 的空心邻域定义为 $U^{\circ}(a;\delta)=\{x\mid 0<\mid x-a\mid<\delta\}$
左邻域与右邻域	点 a 的 δ 左邻域定义为 $U_-(a;\delta)=(a-\delta,a]$，简记为 $U_-(a)$；点 a 的 δ 右邻域定义为 $U_+(a;\delta)=[a,a+\delta)$，简记为 $U_+(a)$. 类似上面，空心左右邻域分别定义为 $U^{\circ}_-(a)=(a-\delta,a)$ 和 $U^{\circ}_+(a)=(a,a+\delta)$.

表 2－2　有界集与确界原理

名　称	内　　容
有界集与无界集	设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集，若存在数 $M(L)$，使得对一切 $x\in S$ 都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$，则称 S 为有上界(下界)的数集，数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界(下界). 若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集. 若 S 不是有界集，则称 S 为无界集.
上确界与下确界	设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集，若数 $\eta(\xi)$ 满足： (i) 对一切 $x\in S$，有 $x\leqslant\eta(x\geqslant\xi)$，即 $\eta(\xi)$ 是 S 的上界(下界)； (ii) 对任何 $\alpha<\eta(\beta>\xi)$ 存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\alpha(x_0<\beta)$，即 $\eta(\xi)$ 又是 S 的最小上界(最大下界). 则称数 $\eta(\xi)$ 为数集 S 的上确界(下确界)，记作 $\eta=\sup S(\xi=\inf S)$
确界原理	设 S 为非空数集，若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

二、重点难点

1. 注意区别有界集与有限集的区别，有界集是指集合内的数有上下界，而有限集是指集合内的元素个数是有限的，这是两个完全不同的概念.

2. 确界原理是后面将要学习的极限理论的基础，读者应给予充分的重视，深刻理解确界原理.

三、典型例题分析

例 1. 设 $S=\{x \mid x^2<2, x\in \mathbf{Q}\}$. 验证 $\sup S=\sqrt{2}, \inf S=-\sqrt{2}$.

解 先验证 $\sup S=\sqrt{2}$. 对任意 $x\in S$，由 $x^2<2$ 得 $x<\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{2}$ 是 S 的一个上界，另一方面，设 $\alpha<\sqrt{2}$，由有理数集在实数集中的稠密性，在区间 $(\alpha,\sqrt{2})$ 中必有有理数 x'，则 $x'^2<2$ 于是 $x'\in S$ 且 $\alpha<x'$. 所以 α 不是 S 的上界，于是按上确界的定义，$\sup S=\sqrt{2}$.

类似上面，可以验证 $\inf S=-\sqrt{2}$.

注 易见本例中数集 S 在有理数集 $\mathbf{Q}$ 范围内无上、下确界，这表明确界原理在 $\mathbf{Q}$ 内不成立.

例 2. 给定数集 A,B，记 $S=A\cup B$ 证明

(1) $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$；

(2) $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

证明 我们只证前一式，后一式的证明类似.

若 A,B 中至少有一个无上界，则 S 也无上界，此时等式两边都为 $+\infty$ 现设 A,B 都有上界，由 $S=A\cup B$，若 $x\in A$(或 $x\in B$)，则 $x\in S$，从而

$$x\leqslant \sup S(\text{因为}\sup S\text{ 是 }S\text{ 的一个上界})$$

上式表明，数 $\sup S$ 是数集 A 的一个上界，而数 $\sup A$ 是 A 的最小上界，故

$$\sup A\leqslant \sup S$$

同理得 $\sup B\leqslant \sup S$. 故有

$$\sup S\geqslant \max\{\sup A,\sup B\}$$

另一方面，对任意 $x\in S$，有 $x\in A$ 或 $x\in B$，故 $x\leqslant \sup A$ 或 $x\leqslant \sup B$，所以

$$\sup S\leqslant \max\{\sup A,\sup B\}$$

综上可得 $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$.

例 3. 证明一切有理真分式 $\frac{m}{n}$(式中 m 及 n 为自然数，且 $0<m<n$) 的集合无最小及最大的元素. 并求集合的上确界及下确界.

证明 令 E 表示一切有理真分式 $\frac{m}{n}$(式中正整数 m,n 满足 $0<m<n$) 所成的集合. 对任何 $\frac{m}{n}\in E$，显然 $\frac{m+1}{n+1}\in E$ 且 $\frac{m+1}{n+1}>\frac{m}{n}$，又 $\frac{m^2}{n^2}\in E$ 且 $\frac{m^2}{n^2}<\frac{m}{n}$. 故 E 中既无最大数，也无

最小数. 显然有

$$\sup E = 1, \quad \inf E = 0.$$

四、课本习题全解

1. **解**　(1) 原不等式等价于

$$\begin{cases} x < 1, \\ (1-x) - x \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x \geqslant 1, \\ (x-1) - x \geqslant 0. \end{cases}$$

前一个不等式组的解为 $x \leqslant \frac{1}{2}$;后者的解集为空集,所以解集为$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(2) 原不等式等价于$-6 \leqslant x + \frac{1}{x} \leqslant 6$,即

$$\begin{cases} x > 0, \\ -6x \leqslant x^2 + 1 \leqslant 6x, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < 0, \\ 6x \leqslant x^2 + 1 \leqslant -6x. \end{cases}$$

前一个不等式组的解集为$[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$,后者的解集为$[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}]$. 因此解集为$[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}] \cup [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$.

(3) 设函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, $x \in \mathbf{R}$. 则由 $a<b<c$ 知当且仅当 $x \in (a,b) \cup (c,+\infty)$. 时 $f(x) > 0$. 故解集为$(a,b) \cup (c,+\infty)$.

(4) 因为当且仅当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$时,$\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$,由正弦函数的周期性,解集是$\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\pi\right]$,其中 k 为整数.

2. **解**　(1) 设 S 为一非空数集,若对 $\forall M > 0$, $\exists x_0 \in S$,使 $x_0 > M$,则称数集 S 无上界.

(2) 设 S 为一非空数集,若对 $\forall M > 0$, $\exists x_0 \in S$,使 $|x_0| > M$,则称数集 S 无界.

3. **证明**　设数集 $S = \{y \mid y = 2 - x^2, x \in \mathbf{R}\}$,对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $y = 2 - x^2 \leqslant 2$,所以 2 是数集 S 的上界. 对 $\forall M > 0$,取 $x_0 = \sqrt{3+M}$,存在 $y_0 = 2 - x_0{}^2 = -1 - M \in S$, $y_0 < -M$,因此数集 S 无下界.

4. **解**　(1) 因为 $x^2 < 2$,即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$,所以对 $\forall x \in S$,有 $x < \sqrt{2}$ 且 $x > -\sqrt{2}$,即$\sqrt{2}$、$-\sqrt{2}$ 分别是 S 的上、下界. 又对任意的正数 ε,不妨设 $\varepsilon < 2\sqrt{2}$,存在 $x_0 = \sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2}$, $x_1 = -\sqrt{2} + \frac{\varepsilon}{2}$,使 x_0、$x_1 \in S$,且 $x_0 > \sqrt{2} - \varepsilon$, $x_1 < -\sqrt{2} + \varepsilon$,所以由定义知 $\sup S = \sqrt{2}$, $\inf S = -\sqrt{2}$.

(2) 对 $\forall x \in S$, $1 \leqslant x < +\infty$,所以 1 是 S 的下界. 因为对 $\forall M > 0$,令 $n = [M] + 1$,则 $n! > M$,故 S 无上界,所以 $\sup S = +\infty$;对 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $x_1 = 1! = 1 \in S$,使 $x_1 < 1 + \varepsilon$,所以 $\inf S = 1$.

(3) 对 $\forall x \in S$,有 $0 < x < 1$,所以 1、0 分别是 S 的上、下界. 又对 $\forall \varepsilon > 0$,不妨设 $\varepsilon < 1$,存在无理数 $\eta \in (0, \varepsilon)$,使 $x_0 = 1 - \eta > 1 - \varepsilon$,使 $x_1 = \eta < 0 + \varepsilon$,所以 $\sup S = 1$, $\inf S = 0$.

(4) 对 $\forall x \in S$,有$\frac{1}{2} \leqslant x < 1$,所以 1、$\frac{1}{2}$ 分别是 S 的上、下界,对 $\forall \varepsilon > 0$,必有正整数 n_0 使$\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$,则存在 $x_0 = 1 - \frac{1}{2^{n_0}} \in S$,使 $x_0 > 1 - \varepsilon$,所以 $\sup S = 1$. 又存在 $x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in S$,使 $x_1 < \frac{1}{2} + \varepsilon$,故 $\inf S = \frac{1}{2}$.

5. **证明**　必要性　设 $\inf S = \xi \in S$,则对 $\forall x \in S$ 有 $x \geqslant \xi$,而 $\xi \in S$,故 ξ 是数集 S 中最小的数,即 $\xi = \min S$.

充分性 设 $\xi=\min S$，则 $\xi\in S$，又因为对 $\forall x\in S$，有 $x\geqslant\xi$，即 ξ 是 S 的下界. 若 $\beta>\xi$，只需取 $x_0=\xi\in S$，则 $x_0<\beta$. 从而 $\xi=\inf S$.

6. **证明** (1) 设 $\xi=\inf S^-$，则对 $\forall x\in S^-$，有 $x\geqslant\xi$，且对 $\forall\beta>\xi$，存在 $x_0\in S^-$，使 $x_0<\beta$. 对 $\forall -x\in S$，$-x\leqslant-\xi$，且对 $\forall-\beta<-\xi$，存在 $-x_0\in S$，使 $-x_0>-\beta$，所以 $\sup S=-\xi$，即 $\inf S=-\sup S$.

(2) 同理可证.

7. **证明** (1) 设 $\sup A=\eta_1$，$\sup B=\eta_2$. 对 $\forall z\in A+B$，存在 $x\in A$，$y\in B$，使 $z=x+y$，从而 $z\leqslant\eta_1+\eta_2$. 对 $\forall\varepsilon>0$，必存在 $x_0\in A$，$y_0\in B$，使 $x_0>\eta_1-\frac{\varepsilon}{2}$，$y_0>\eta_2-\frac{\varepsilon}{2}$，则存在 $z_0=x_0+y_0\in A+B$，使 $z_0>(\eta_1+\eta_2)-\varepsilon$. 故 $\sup(A+B)=\eta_1+\eta_2=\sup A+\sup B$.

(2) 同理可证.

8. **证明** 设 $A=\{a^r\mid r$ 为有理数，$r<x\}$. 因为 $a>1$，a^r 严格递增，故对任意的有理数 $r<x$，有 $a^r<a^x$，即 a^x 是 A 的一个上界. 对 $\forall\alpha<a^x$，由 $a^x>0$ 及有理数的稠密性，不妨设 $\alpha>0$ 且为有理数，由 $\log_a x$ 严格递增加，$0<\alpha<a^x$ 等价于 $\log_a\alpha<\log_a a^x=x$，由有理数的稠密性，存在有理数 r_0 使得 $\log_a\alpha<r_0<x$，所以 $\alpha=a^{\log_a\alpha}<a^{r_0}<a^x$.

故 $a^x=\sup A=\sup\{a^r\mid r$ 为有理数，$r<x\}$，$a>1$. $a<1$ 时类似可证

第三节 函数概念

一、基本内容

表 3－1 函数概念

名 称	内 容
函数定义	给定两个实数集 D 和 M，若有对应法则 f，使对 D 内每一个数 x，都有唯一的一个数 $y\in M$ 与它相对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记作 $f:D\to M(x\to y)$ 数集 D 称为函数 f 的定义域，x 所对应的数 y，称为 f 在点 x 的函数值，常记为 $f(x)$. 全体函数值的集合 $f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}(\subset M)$ 称为函数 f 的值域.
复合函数	设有两函数 $y=f(u)$，$u\in D$，$u=g(x)$，$x\in E$. 记 $E^*=\{x\mid g(x)\in D\}\subset E$. 若 $E^*\neq\varnothing$ 则对每一个 $x\in E^*$，可通过函数 g 对应 D 内唯一的一个值 u，而 u 又通过函数 f 对应唯一的一个值 y. 这就确定了一个定义在 E^* 上的函数，它以 x 为自变量，y 为因变量，记作 $y=f(g(x)),x\in E^*$ 或 $y=(f\circ g)(x),x\in E^*$ 称为函数 f 和 g 的复合函数. 并称 f 为外函数，g 为内函数，u 为中间变量. 也可简写 $f\circ g$.

反函数	设函数 $y=f(x),x\in D$,满足对于值域 $f(D)$ 中的每一个值 y,D 中有且只有一个值 x 使得 $f(x)=y$,则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数,称这个函数为 f 的反函数,记 $$f^{-1}:f(D)\to D\quad(y\to x)$$ 或 $$x=f^{-1}(y),y\in f(D)$$

表 3－2　初等函数

基　本 初等函数	常数函数　$y=c$　(c 是常数) 幂函数　$y=x^{\alpha}$　(α 是实数) 指数函数　$y=a^{x}$　$(a>0,a\neq 1)$ 对数函数　$y=\log_a x$　$(a>0,a\neq 1)$ 三角函数　$y=\sin x$　(正弦函数)　$y=\cos x$(余弦函数) $y=\tan x$　(正切函数)　$y=\cot x$　(余切函数) 反三角函数　$y=\arcsin x$　(反正弦函数)　$y=\arccos x$(反余弦函数) $y=\arctan x$(反正切函数)　$y=\mathrm{arc}\cot x$(反余切函数)
初等函数	由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算得到的函数称为初等函数.

二、重点难点

1. 函数定义的两要素:定义域及对应法则 f.

两个函数的定义域与对应法则均相同时,两函数相同;函数表示法与具体变量选用的字母无关,如:$y=x^2$ 与 $z=t^2$ 表示同一函数.

2. $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 表示同一曲线,若交换反函数中的 x 和 y,即用 x 表示自变量,y 表示因变量,则 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 图像关于 $y=x$ 对称.

3. 注意复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义,若存在 $X^*\subset X$,使 $\varphi(x)$ 在 X^* 上的值域 $W^*\subset U$,U 为 $y=f(u)$ 的定域,则 X^* 为 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域. $\varphi(x)$ 值域与 $f(u)$ 定义域不相交时,不能复合. 如 $y=\ln u$ 与 $u=-x^2$ 不能复合为 $y=\ln(-x^2)$.

4. 初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而得到的函数. 若一个函数可表示为基本初等函数的有限次四则运算和有限次复合的形式,则它就是初等函数.

三、典型例题分析

例 1. 讨论分别符合以下要求的函数是否存在:

(1) 定义域为 $\{0,1\}$,值域为 $\{1,2,3\}$;

(2) 定义域为 $\{1,2,3\}$,值域为 $\{0,1\}$;

(3) 定义域为 R,值域为 $\{0\}$;

(4) 定义域为 $[0,1]$,值域为 $[0,2]$.

解　(1) 根据函数的定义,在定义域中的每一个数,都惟一地对应值域中的一个数. 现定义域中只含两个数,而"值域"由 3 个数组成,因此,对于无论何种对应法则,"值域"中至少有