科学天下 新观念数学

微积分之倚天宝剑

——打遍泰勒级数、多重积分、偏导数、向量微积分

[美]C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森/著 张菽/译

湖南科学技术出版社

昭告天下

真要命！

这本书内容过于清晰、直接、搞笑，
可能危及微积分“让学生迷惑、补考重修”
这历久不衰的重要功能。
本人建议：学校应该把这本书列为
禁书！
——William Thurston
（1982年菲尔兹奖得主）

打遍级数

HOW TO ACE THE REST OF CALCULUS: THE STREETWISE GUIDE

科学天下 新观念数学

微积分之倚天宝剑

——打遍泰勒级数、多重积分、偏导数、向量微积分

[美]C·亚当斯 J·哈斯 A·汤普森/著 张菽/译

湖南科学技术出版社

HOW TO ACE THE REST OF CALCULUS: THE STREETWISE GUIDE

图书在版编目（C I P）数据

微积分之倚天宝剑 /（美）亚当斯，（美）哈斯，
（美）汤普森著；张菽译. —长沙：湖南科学技术出版
社，2005. 5
ISBN 7-5357-4230-0

I.微... II.①亚...②哈...③汤...④张...
III. 微积分－高等学校－教学参考资料 IV.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 043349 号

First published in the United States
by
W.H.FREEMAN AND COMPANY,New York and Basingstoke

科学天下　新观念数学

微积分之倚天宝剑

——打通泰勒级数、多重积分、偏导数、向量微积分

著　　者：[美]C · 亚当斯 J · 哈斯 A · 汤普森
译　　者：张　菽
策划编辑：孙桂均　李　媛
文字编辑：陈一心
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
　　　　　http://www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科　0731 - 4375808
印　　刷：长沙化勘印刷有限公司
　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：长沙市青园路 4 号
邮　　编：410004
出版日期：2005 年 5 月第 1 版第 1 次
开　　本：700mm×1020mm　1/16
印　　张：19.5
字　　数：304000
书　　号：ISBN 7 - 5357 - 4230 - 0/N · 119
定　　价：25.00 元

目录

目录

谨以此书

献给

所有买了我们第一本书的学生们，

衷心希望你们第一学期

拿到90分

第 1 章

导　言

本书是《微积分之屠龙宝刀》的续篇，读者是已经修过至少一学期微积分的学生，书里的内容包含了微积分剩下的部分中，所有你需要知道的素材，诸如多变量微积分，以及序列与级数．为什么我们要写这第二本书呢？主要原因是，在《微积分之屠龙宝刀》出版后，我们收到了无数正面回应的信件，得到广大读者的鼓舞．以下是其中一封来信：

亲爱的三位数学怪胎：

谁想得到你们三个满脑子数学的鸭蛋头，居然会写出一本让我欣赏的书？你们的《微积分之屠龙宝刀》真是写得很棒，完全转变了我对数学的观感．为了让自己有更多时间做数学习题，我已经毅然决然辞去了兄弟会的“整人组”组长一职，我甚至正在认真考虑，是否也应该一并戒掉啤酒．之所以迟迟未做决定，原因是一旦戒了酒，我这兄弟会自然就待不下去啦．不过现在想想，即使离开兄弟会，也没啥大不了！自从你们的书让我开了眼界，看到数学真实、美好的一面之后，我对人类的各种创新努力，重新产生了敬意，也不再贸然轻视我们这个多元社会里的每一个人．换言之，我不再以貌取人；以前我认为，怪胎不可能有啥能耐跟内涵，现在我终于了解到，外形上的特质不足以反映出内在的巨大创新潜力．为此，我要谢谢你们改变了我的一生．

我现在已下定决心，今后要贡献绵薄之力，扫除社会上跟昨日之我相同的无知偏见．不过我也知道，无论我如何努力，成效远不如你们通过著书立说，

匡正社会陋习的伟大贡献．你们真了不起，我将永远感谢你们．如果你们认为我有任何帮得上忙的地方，不管是人事上还是财务上，千万别客气，尽管吩咐．

庄孝维　谨上

附言　我只是在希望跟祈祷，你们能考虑为《微积分之屠龙宝刀》写一本续集，写完该书尚未提到的部分，包括序列、级数及多变量微积分等等．

好啦好啦！算你厉害，居然给你猜中了，这封信不是真的，而是我们杜撰出来的．不过，信中流露的感情却是千真万确的．在一个又一个邮包的来信里，虽说每位读者的表达方式不尽相同，但对《微积分之屠龙宝刀》的赞誉，却是异口同声，让我们大大感动．

如果你现在正在书店里翻阅这本书，你大概是：

1．刚修过初等微积分，使用过我们的《微积分之屠龙宝刀》，而且顺利拿到高分．那么你还在犹疑什么？已经证明有帮助了，不是吗？

2．刚修过初等微积分，但没有读到我们的前一本书，结果成绩很差．显然，你应该即刻买下这本书，以便亡羊补牢．顺便把第一本也一并买下，保证有益无害．

3．并没有买过我们的第一本书，而你也获得了高分．恭喜你，你真是不简单，这证明了你的天资跟努力都具有相当水准．但是你有没有仔细想一想，你是不是因为运气好，才拿到高分？奉劝你赶快买下这本书，好大幅提高胜算．

4．的确买了我们的第一本书，学期结束时却没能获得高分．难道是我们忘了告诉你，即使有了那本书，你还是必须上课听讲，考试时也不能缺席？

我们实在不愿意想到或看到，你站在书店拥塞的走道上读这本书，身旁人来人往，而你连个坐下伸个腿的地方都没有．要是你现在就把书买回家，待会儿你就可以啜着冷饮，舒舒服服地坐下来，仔细阅读你刚买的新书．这岂不是一大乐事？

在这本书中，我们将不再重复告诉你如何选任课老师、如何有效学习微积分等等（不过，我们希望这两本书能够并排摆在你的书架上，随时供你参考），在你使用这《微积分之倚天宝剑》时，那些忠告一样用得着.

这本书的目的，是在向你讲解微积分后半部的一些专题，而不是要取代你现有的教科书. 事实上，它也无法取代教科书，原因是份量不够重. 但是，这本书足以让你明白，微积分这门课究竟在搞些什么. 所以你就放心读吧，希望你读得开心!

附言　不妨上网浏览我们的网站 howtoace. com，你会看到许多帮助你拿高分的资讯，包括旧考题网页的联结、数学笑话，以及进一步的讲解等等.

第 2 章
不定式与反常积分

2.1 不定式

知道自己的能耐与极限，是一项非常重要的技能．这意思就是说，你最好不要因为一时高兴，跑到上海金茂大厦的屋顶，只用几根指头吊在屋檐边上，除非你确实知道你有这个本事，绝对不会出事．要练得这个不寻常的本事，不可一蹴而就，你必须花上许多工夫逐步练习；一开始时也许你得趁着没课，跑到学校体育馆吊吊单杠，接下来试试自家浴室的窗子外沿，然后是外白渡桥的桥身，最后才轮得到金茂大厦．你必须知道自己究竟有多大本事，你的极限在哪儿．

数学也一样，你希望计算出你的极限值．譬如看到 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2)$，你希望能算出 11，或者：

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-2}{x^2}=\frac{-1}{e^2}.$$

不过，就像你可能会高估你的体能，你也很有可能高估了你求极限的本事．比方说，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-12}{x^3-8}$等于什么？

答案不是很明显吧？如果把 $x=2$ 代进式子里，我们会得到$\dfrac{0}{0}$．那么$\dfrac{0}{0}$又

等于多少呢？等于0、1，还是∞？好问题！实际上，这个极限可以等于它们之中的任何一个．那就是为什么我们把这样的极限叫做“不定式”．

最顶顶有名的不定式就是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

如果我们把 $x=0$ 代进上式，得到的是$\frac{0}{0}$，这答案能告诉我们的不多，但是我们真的很想知道这个极限，怎么办？

会得到$\frac{0}{0}$这种极限的状况有许多种，特别是当我们要用导数的极限定义，来证明 $\sin x$ 的导数是 $\cos x$．好在我们可以用一条现成的法则，来求这类极限，这条法则是由17世纪的大数学家伯努利（Johann Bernoulli）首先发现的，但是却命名为“洛必达法则”．洛必达*（Guillaume L'Hôpital）是一位有钱的侯爵，他花钱请伯努利教他微积分，结果也抢走了伯努利的功劳！（*洛必达也是数学家.）

其实，这种事情屡见不鲜，就拿这本书来说吧，虽然作者挂着我们三个人的名字，可是根本就不是我们写的——而是我们花钱请比尔·盖茨写的！附带一提，L'Hôpital 的正确发音是 Low-pee-tall（译按：中文译成“洛必达”，算是相当传神，不过作者在此开了个玩笑，Low-pee-tall 在英文字面上有“智商低劣者，骑在高智商者头上撒尿”的意义）．

让我们言归正传，下面就是这个法则：

洛必达法则： 如果$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$是不定式，那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

这条法则到底要告诉我们什么？它其实是说：“如果在你取极限时，你被卡在$\frac{f(x)}{g(x)}$这一步上，求不出答案，那么只要改看$\frac{f'(x)}{g'(x)}$就可以啦！”

例题 1 试求$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

解： 首先我们得瞧瞧题目是否为不定式．把 $x=0$ 代入$\frac{\sin x}{x}$之后，我们得到

$\frac{0}{0}$，因此用得上洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

哇塞！真是简单！看样子没有人不会爱上这条法则．我们再试一个问题看看！

例题 2 试求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

解：这也是一个$\frac{0}{0}$不定式，可以套用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2.$$

对于这一题，其实我们无须用上洛必达法则；我们仅仅用一些代数，把式子化简一下就可以了，就像这样：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

瞧，答案一样，用哪一个方法全看你的喜好．

例题 3 试求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$.

解：这又是一个$\frac{0}{0}$不定式！它们简直是无所不在．于是，洛必达告诉我们：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$ （然而这仍然还是$\frac{0}{0}$的形式，

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}.$$ 所以再套一次洛必达法则．）

注意，在这题中，我们连续用了两次洛必达法则，但是有个重点别忘了：在第二次套用洛必达法则前，还是必须检查它仍然是个不定式．

常犯的错误 把洛必达法则套用到非不定式，是学生常犯的错误．这种错误在任何一种情况下都可能发生，但最常出错的地方，就是套用不止一次的时候．无论何时，请在每一步骤仔细检查．

牵涉到∞的不定式

如果我们遇到$\frac{\infty}{\infty}$这种不定式，洛必达法则一样可以派上用场.

例题4　试求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解：如果我们把 $x=\infty$ 代入分子与分母，会得到$\frac{\infty}{\infty}$，所以也是一个不定式. 套用洛必达法则，就得到：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

极限是0. 这个答案应该怎么解释呢？它的意思就是，当 x 越近无穷大时，分母的$\sqrt{x}$增加得比分子的 $\ln x$ 要快.

其他的不定式

前面我们看到了，如果一个极限成了$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的形式，我们都可以用洛必达法则把它摆平；但这也是能够套用该法则的先决条件.

警告！$\frac{0}{\infty}$可不是不定式，它根本就等于0. 还有，$\frac{\infty}{0}$也不是不定式，它等于$\pm\infty$. 这两种情形下，都不能使用洛必达法则.

有的时候，其他一些形式也可以改成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的形式. 比方说，我们假定$\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$，由于这个乘积可以等于任何数，所以也是一种不定式；我们可以把它改成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的形式，只要把两个函数挪动一下就成了：

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\text{或}f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

如此挪动之后，直接做下去就可以求解了.

例题5　试求$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\ln x$.

解：若让 x 越趋近无穷大，我们可以看出它是 $0\cdot\infty$ 的形式，于是照以上所说，把它重写为：

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln x=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x}.$$

如此一来，它就变成不定式，所以：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=0.$$

这就有点像你想要过河，而唯一的桥建在离你所站的位置有点距离，那么你就得绕点路，走到桥头去．这也有点像小婴儿用奶瓶喝牛奶，喝完后胀了一肚子的空气，必须把空气拍出来，小婴儿才能入睡——把空气拍出来，相当于把原式重写成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式，入睡就是使用洛必达法则．

2.2 反常积分

在写《微积分之屠龙宝刀》时，我们一直避免提到这玩意，但是现在就不得不介绍一下了．你一定知道它们的那副德性：来参加“微积分舞会”时，穿着 T 恤，上面画着晚礼服；吃饭的时候，根本不理会餐桌礼仪，就只用那把吃甜点的小叉子，从头吃到尾；当旁人因消化不顺畅，不由自主地放了一个响屁时，它们会肆无忌惮的高声大笑，让人难堪．没错，我们描绘的就是反常积分，如果它们不是这么重要，我们压根儿不会请它们来搅局．

反常积分又可概分为两类．第一类是没有上限或下限的积分；这类的积分不是从 -2 积分到 4 或是从 3 积分到 7 等等，而是从 1 到 ∞，或从 $-\infty$ 到 2，甚至是从 $-\infty$ 到 ∞．例如 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$，就是一个像这样的积分．

反常积分的第二种类型是，它们有一定的积分区间，不过在积分过程中，被积函数的值在某处却跑到 $\pm\infty$ 去了．例如 $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^{2/3}}dx$，当 $x=0$ 的时候，它的被积函数等于 ∞．

为了容易解释，我们最好把以上两种类型分开来讨论．首先讲第一类型．

当积分上下限为 ± ∞时

让我们再瞧瞧上面所举的例子$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. 由于它的上限为无穷大，看起来多少有些怪怪的. 我们应该如何着手呢？在《微积分之屠龙宝刀》里你已经学到，定积分通常代表被积函数图形下方的面积，那么我们且利用这个观点，来看看这个例子. 没错，从图 2.1 可看出，它确实是表示从 1 到∞之间，$\frac{1}{x^2}$曲线下方的面积，应该没啥问题.

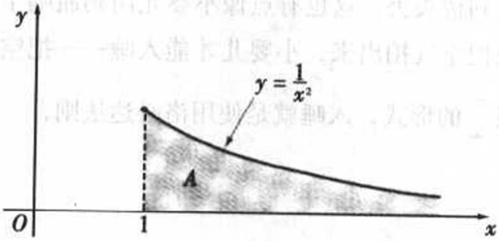

图 2.1 相当于$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$的面积

我们知道你的脑袋里在想什么：图上那块灰色色块，面积会随着 x 增大而变大，无穷无尽，所以答案必定是∞，这还不简单！慢着！你这想法看似振振有词，但是却跟事实不符！为了发掘真相，我们得正确解释∞这个积分上限的性质与意义. 在这里，我们应该把∞想成是一堆愈来愈大的数的极限，也就是$\lim\limits_{b\to\infty} b$，如此一来，这个反常积分例子，就要正式解释成：

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{x}\bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{-1}{b}\right)-(-1)\right]=0-(-1)=1,$$

所以在这个例子里，函数曲线下方的面积就等于 1.

把这个实例一般化之后，就得到以下的公式：

$$\boxed{\int_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.}$$

有的时候，就像上例一样，反常积分的答案是个有限的数，此时我们就说这个反常积分“收敛”（converge）. 但在其他时候，极限是∞或根本不存在，我