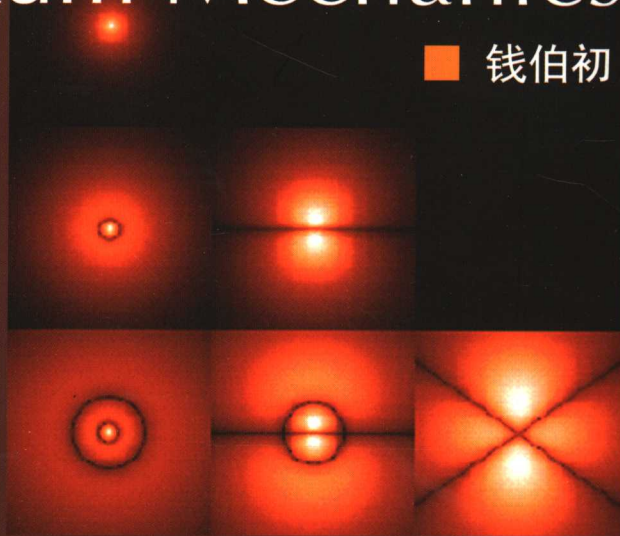


量子力学

Quantum Mechanics

■ 钱伯初



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Quantum Mechanics

量子力学

钱伯初

高等教育出版社

内容简介

本教材的作者是首届“高等学校教学名师奖”获得者,由他主持的“量子力学”课程被评为 2004 年度“国家精品课程”。该教材就是作者在总结自己 50 年的教学实践经验悉心编写而成的。

本书在基本原理和典型定态问题的叙述上比较详细,主要是希望能使读者对基本概念、基本原理有较全面和深入的理解。作者把自己在长期的教学中总结出来的学生容易接受、教师容易讲解的一些方法融入了教材,使得课程内容更易教、易学。

全书内容分为十章:绪论、波函数和薛定谔方程、基本原理、表象理论、中心力场、定态微扰论与变分法、自旋、散射、量子跃迁、多粒子体系。各章均有习题,书末附有数学附录。

本书可作为理工类各专业量子力学课程的教材,也可供其他专业和社会读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

量子力学 / 钱伯初. —北京: 高等教育出版社,
2006.1

ISBN 7-04-017783-8

I. 量... II. 钱... III. 量子力学-高等学校-教材 IV. O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 140839 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京中科印刷有限公司		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2006 年 1 月第 1 版
印 张	23	印 次	2006 年 1 月第 1 次印刷
字 数	430 000	定 价	26.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 17783-00

前 言

最近十年,兰州大学“国家理科基地”之物理学基地的量子力学课程,一直由本人主讲,实际讲授 4×16 学时左右(习题课在内)。本书内容(有*号的章节除外)几乎就是讲课内容的实录。1980年以来,兰州大学的基础课教学颇受外界关注。希望本书的出版能够促进校际教学交流,有助于提高我国量子力学的教学水平。

改革开放以来,国内许多大学都在“量子力学”课程之后又开设了“高等量子力学”等后继课程。虽然很难对这两门课程的内容作出严格的划分,但是多数高校实际上又都掌握着相当统一的划分标准。诸如相对论量子力学,路径积分等等,通常认为都是“高等量子力学”的标准内容。对于这类内容,本书一律割爱。

编写本书时,对于重要实验及有关史实,一般不作详细叙述,因为它们都可以在光学、原子物理等课程的教材中读到。按照我国已经实行多年的教学计划,在学习“量子力学”课程以前,通常已经学过这些课程。

根据本人从事量子力学教学工作50年的经验,为了掌握量子力学,首先要对基本概念、基本原理有全面的、融会贯通的理解,并能结合若干典型实例来印证、加深并巩固这些理解,使其成为有血有肉、实实在在的东西。为此,本书叙述基本原理和典型定态问题比较详细,所用篇幅较多,希望能对使用本书的广大师生有所帮助。如课程学时较多(72学时以上),书中第二、第三、第四、第五、第六、第七、第九章都可以作为重点。如学时较少,可以适当降低对第一、第四、第六、第八、第十章的要求。

非物理类专业的学生学习“量子力学”课程,大概都会感到困难,主要原因是欠缺许多物理及数学方面的预备知识。本书从两方面采取措施帮助使用本书的师生减少困难。物理方面,尽量少引用其他课程的非主体内容,而代之以简明直观的不需要预备知识的讲法。数学方面,希望书末的几个数学附录能够帮助不熟悉相应内容的读者渡过数学难关。对于曾在正规课程中学过这些数学知识的师生,希望这些数学附录也能在某种程度上帮助他们掌握一些公式的简明推导方法。

本书各章均附有相当数量的习题,而且半数以上习题都有适当难度。为了学好理论物理课程,多做习题是非常必要的。在许多场合,解题能力常被作为衡量学习效果的重要标准。读者如能独立完成本书半数左右习题,可以认为已经

达到课程的基本要求。如果绝大部分习题都能够独立解出,应付“考研”应该确有把握。

趁本书出版之际,作者谨向全国高校量子力学研究会全体同仁致意。1980年以来,研究会组织了大量卓有成效的学术交流活动,作者得以和各校教师切磋交流,获益良多。北京师范大学喀兴林教授,北京大学曾谨言教授,中国科学技术大学张永德教授,南开大学葛墨林院士都与作者进行过多次有益的讨论,对本书的编写提出了许多宝贵建议,作者深表感谢。

由于水平有限,书中错误或不当之处在所难免,敬请读者不吝指正。

钱伯初

2005年8月于兰州大学

目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 黑体辐射定律与普朗克常数	1
§ 1.2 光子	6
§ 1.3 玻尔的量子论	9
§ 1.4 原子物理中的特征量	15
§ 1.5 德布罗意的“物质波”假设	21
习题	24
第二章 波函数和薛定谔方程	27
§ 2.1 薛定谔方程	27
§ 2.2 波函数的统计诠释	31
§ 2.3 定态	37
§ 2.4 一维平底势阱中的粒子	43
§ 2.5 一维谐振子	52
§ 2.6 势垒贯穿	58
习题	63
第三章 基本原理	66
§ 3.1 波函数和算符	66
§ 3.2 态叠加原理	70
§ 3.3 线性算符	71
§ 3.4 波函数的普遍物理诠释	76
§ 3.5 动量	81
§ 3.6 力学量算符的对易关系式	88
§ 3.7 两个力学量算符的共同本征态	91
§ 3.8 不确定度关系	94
§ 3.9 状态和力学量随时间的变化	98
§ 3.10 对称性和守恒定律	105
§ 3.11 海尔曼定理和位力定理	113
习题	120
第四章 表象理论	123
§ 4.1 狄拉克符号	123
§ 4.2 量子力学公式及其矩阵表示	128
§ 4.3 坐标表象	137

* § 4.4 动量表象	140
§ 4.5 能量表象	144
§ 4.6 一维谐振子(升降算符方法)	150
§ 4.7 角动量	157
习题	162
第五章 中心力场	165
§ 5.1 中心力场的一般概念	165
§ 5.2 自由粒子	171
* § 5.3 球形势阱	176
§ 5.4 粒子在库仑场中的运动(束缚态)	179
* § 5.5 二维中心力场	189
习题	191
第六章 定态微扰论与变分法	195
§ 6.1 非简并态微扰论	195
§ 6.2 简并态微扰论	199
§ 6.3 变分法	204
习题	208
第七章 自旋	211
§ 7.1 电子自旋	211
§ 7.2 电子的总角动量	217
§ 7.3 碱金属光谱的精细结构	222
* § 7.4 粒子在电磁场中的运动	225
§ 7.5 塞曼效应	230
* § 7.6 磁共振	234
§ 7.7 两个角动量的耦合	237
§ 7.8 二电子体系的自旋波函数	241
习题	243
第八章 弹性散射	246
§ 8.1 散射过程的一般描述	246
§ 8.2 分波法	249
* § 8.3 低能散射	257
§ 8.4 玻恩近似	260
习题	270
第九章 量子跃迁	273
§ 9.1 与时间有关的微扰论	273
§ 9.2 几种典型跃迁	276
§ 9.3 光的吸收与受激辐射	280
§ 9.4 自发辐射	285

* § 9.5 激光原理	289
* § 9.6 能量 - 时间不确定度关系	292
习题	295
第十章 多粒子体系	297
§ 10.1 二粒子体系	297
§ 10.2 全同粒子体系	300
§ 10.3 氦原子	304
§ 10.4 氢分子	310
§ 10.5 化学键	316
* § 10.6 双原子分子的振动和转动	319
习题	322
附录 1 δ 函数和傅里叶变换	325
附录 2 厄密多项式	329
附录 3 轨道角动量算符	332
附录 4 球谐函数	334
物理常数表	342
习题答案	343
我的教学生涯	356

第一章 绪 论

量子力学是 20 世纪物理学最重要的发展,它和相对论一起,构成近代物理学的主要理论基础.

本章将扼要叙述量子力学诞生前早期量子论的要点,为系统叙述量子力学原理做些概念上的准备.有关的史实及实验详情大都已在“原子物理学”课程中讲过,我们尽量从简,而将叙述的重点放在某些理论概念上.

§ 1.1 黑体辐射定律与普朗克常数

在各种温度下,任何物体都能辐射出电磁波,同时也能吸收外界辐射来的电磁波.所谓黑体是指吸收本领最大的物体,它能全部吸收辐射到它表面上的电磁波.用热力学理论可以证明,黑体的热辐射本领也大于其他物体.空腔表面的小孔就是一种理想的黑体模型.

1879 年,黑体热辐射的实验测量确定了著名的斯忒藩(J. Stefan)四次方定律,1884 年,玻耳兹曼从热力学理论上导出这条定律,因此,称此定律为斯忒藩-玻耳兹曼定律:

$$J_u = \sigma T^4 \quad (1)$$

J_u 为热辐射能流量(单位时间内单位表面积辐射出的电磁波能量),也称辐出度. T 为黑体的热力学温度, σ 为普适常量叫做斯忒藩-玻耳兹曼常量,它与构成黑体的材料性质无关,其值为

$$\sigma = 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

图 1-1 是黑体热辐射示意图. 将空腔加热至温度 T , 这时腔内电磁场具有稳定的能量分布(各种频率的电磁波), 经由小孔 ΔS 辐射出的能流可用仪器测出. 如以 u 表示腔内电磁场能量密度(单位体积内电磁波能量), c 表示光速, 则单位时间内经由 ΔS 沿 $d\Omega$ 方向辐射出的能量为

$$\Delta S \cdot \cos \theta \cdot cu \frac{d\Omega}{4\pi}$$

经由 ΔS 辐射出的总能量为

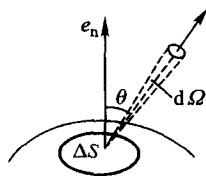


图 1-1

$$\begin{aligned}
 J_u \Delta S &= \int_{\theta \leq \frac{\pi}{2}} \Delta S \cos \theta c u \frac{d\Omega}{4\pi} \\
 &= \Delta S c u \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{4} c u \Delta S
 \end{aligned}$$

因此

$$u = \frac{4}{c} J_u = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad (2)$$

热辐射电磁场的能量密度与温度 4 次方成正比. 注意比例系数为普适常数.

实验还可以测量出热辐射能量的频率分布. 电磁波的波长 λ 与频率 ν 及角频率 $\omega = 2\pi\nu$ 间有如下关系:

$$c = \lambda \nu = \frac{\lambda \omega}{2\pi} \quad (3)$$

如以 $\rho(\omega) d\omega$ 表示单位体积内角频率在 $(\omega, \omega + d\omega)$ 间的电磁波能量, 则能量密度 u 按 ω 的分布可以表示成

$$u = \int_0^{\infty} \rho(\omega) d\omega \quad (4)$$

实验测得各种温度下 u 的频率分布曲线如图 1-2 所示. 在长波部分 ($\omega \rightarrow 0$) $\rho(\omega) \propto \omega^2 T$; 在短波部分 ($\omega \rightarrow \infty$) $\rho(\omega)$ 随 ω 之增大而迅速减小. 对于每一种温度, $\rho(\omega)$ 都存在一个极大值, 相应的角频率 ω_m 和温度 T 成正比, 相应的波长 $\left(\lambda_m = \frac{2\pi c}{\omega_m}\right)$ 和温度 T 成反比,

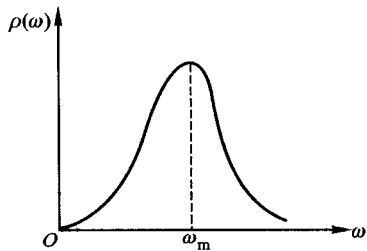


图 1-2

$$T\lambda_m = 5.1 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (5)$$

这规律称为维恩 (W. Wein) 位移定律. 注意 (5) 式中的实验常数也是普适常数.

黑体辐射定律的发现引起了物理学界的极大关注, 吸引了许多著名学者对它进行深入的理论探讨. 当时经典物理学 (牛顿力学, 电磁学, 热力学和经典统计物理是其主要内容) 已经日臻成熟, 权威物理学家大多相信经典物理学能够解释各类物理现象, 黑体辐射定律应该也不例外. 然而, 冷酷的事实却是, 企图在经典物理的理论框架内解释黑体辐射定律的努力, 都在不同程度上遭到失败. 其中最有成效的是瑞利和金斯 (Rayleigh - Jeans) 的研究. 金斯利用波动理论, 准确

求得单位体积内 $(\omega, \omega + d\omega)$ 范围内电磁振动模式总数, 它等于

$$\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \quad (6)$$

每一种电磁振动模式相当于一个简谐振子, 在温度 T 下应该具有某种能量. 按照经典统计物理的“能量均分定理”, 温度 T 下简谐振子应该具有平均能量 kT (k 是玻耳兹曼常数). 瑞利将“能量均分定理”用于热平衡下的电磁场 (即热辐射场), 从而得出结论: 单位体积内 $(\omega, \omega + d\omega)$ 范围内电磁振动能量应该是

$$\rho(\omega) d\omega = \frac{kT \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \quad (7)$$

这称为瑞利 - 金斯公式. 这个公式在长波部分和实验曲线符合得极好, 而在短波部分则和实验结果完全不符合. 更为严重的是, (7) 式对 ω 积分, 将导致 $u \rightarrow \infty$, 这个结论显然是错误的, 这就是历史上有名的“紫外发散困难”.

经历了许多失败, 终于使物理学界认识到, 为了解释黑体辐射定律, 光靠经典物理学是不行的, 必须有一个新的理论. 这就是 1900 年普朗克 (M. Planck) 提出的量子论.

普朗克量子论的核心是下述“量子假设”: 频率为 ν 的电磁振动和原子、分子等物质发生能量转换时, 能量不能连续变化, 只能“量子”式地变化, 每份“量子”为

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right) \quad (8)$$

其中 h 是普适常数 (后人称之为普朗克常数). 在这假设下, 普朗克利用热力学和统计物理理论, 导出了著名的普朗克公式

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \left/ (e^{\hbar\omega/kT} - 1) \right. \quad (9)$$

这个公式在各种温度下, 全部频率范围内, 均与实验曲线精确符合. 历史上, 普朗克导出 (9) 式的过程相当复杂, §9.4 将给出爱因斯坦对此式的简单证明.

普朗克的“量子假设”是和经典物理的整套概念抵触的. 按照经典物理学, 一切物质的运动变化都是连续进行的, 能量变化也是连续的, 这正是导致热平衡下“能量均分定理”的前提条件. 普朗克舍弃了“能量均分定理”, 代之以“量子假设”这在概念上是一次革命性的突破. 从 (9) 式的结果看, 由于能量的量子化, 角频率为 ω 的每一种电磁振动模式在温度 T 下的平均能量不再取“能量均分定理”给出的 kT , 而是

$$\overline{E}_\omega = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

在长波部分, $\hbar\omega \ll kT$, 上式给出 $\overline{E_\omega} \approx kT$, 与能量均分定理的结论一致. 在短波部分, $\hbar\omega \gg kT$, 上式给出

$$\overline{E_\omega} \approx \hbar\omega e^{-\hbar\omega/kT} \ll kT$$

这意味着高频振动被“冻结”, 很难获得能量, 因此避免了“紫外发散困难”. 当一种电磁振动模式(角频率 ω) 具有能量 E_ω 时, 相应的“能量子”数目为 $n_\omega = \frac{E_\omega}{\hbar\omega}$,

(9)式相当于“能量子”数的平均值为

$$\overline{n_\omega} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (10)$$

当 $\hbar\omega \ll kT$, $\overline{n_\omega} \approx \frac{kT}{\hbar\omega} \gg 1$, 电磁振动的能量变化近似于连续变化, 量子论的结果和经典物理结果一致. 当 $\hbar\omega \geq kT$, $\overline{n_\omega} < 1$, 量子论的结果和经典物理结果有本质差别.

将(9)式代入(4)式, 可以算出热辐射电磁场能量密度:

$$u = \frac{\pi^2 (kT)^4}{15 (\hbar c)^3} \quad (11)$$

这结果与斯忒藩 - 玻耳兹曼定律一致.

普朗克的“量子假设”是与整个经典物理格格不入的, 使许多习惯于经典物理思维模式的资深物理学家感到难以接受. 普朗克本人就曾花了多年时间研究能否不要“量子假设”, 而在经典物理的范围内导出(9)式, 结论是不能. 显然, 这意味着黑体辐射现象的后面隐藏着一种新的物理规律, 这就是今天所谓的量子力学规律.

在这里, 我们将用量纲分析方法来证明黑体辐射定律绝不可能在经典物理学的框架范围内得到解释.

物理学的发展历史表明, 每一种基本物理规律, 均伴有相应的普适常数. 例如代表万有引力定律的普适常数是引力常数 G , 代表电磁规律和相对论的基本普适常数是光速 c , 代表统计物理规律的基本普适常数是玻耳兹曼常数 k , 等等. 如果黑体辐射定律可由经典物理解释, 有关的理论将是电磁学和统计物理, 则在辐射场能量密度 u 的构造式中, 只能包含 c, k, T . 以 L, t, E, K 分别表示长度, 时间, 能量, 温度的量纲, 有关各量的量纲如下:

$$\begin{aligned} u &\text{——} EL^{-3}, & c &\text{——} Lt^{-1} \\ k &\text{——} EK^{-1}, & kT &\text{——} E \\ \sigma &\text{——} Et^{-1}L^{-2}K^{-4} \end{aligned}$$

从量纲关系看, u 显然不可能由 c, k, T 构成, σ (普适常数) 不可能由 c, k 构成. 根据(2)式, 可以判断 $u \propto (kT)^4$, 而从 u, c 与长度的量纲关系看, 可以设想 $u \propto c^{-3}$, 因此, $u \propto (kT)^4 c^{-3}$. 而 $uc^3 (kT)^{-4}$ 的量纲为 $(Et)^{-3}$. 如果设想黑体辐射现象涉及一种新的 (未知的) 基本物理规律, 相应的基本普适常数 (记为 h) 量纲为 Et , 则 u 的构造式可以设想为

$$u = A(kT)^4 (\hbar c)^{-3} \quad (12)$$

其中 A 为无量纲纯数. 结合(2)式, 可得斯忒藩 - 玻耳兹曼常数的构造式为

$$\sigma = \frac{A}{4} k^4 \hbar^{-3} c^{-2} \quad (13)$$

读者当然已经想到, 这里提到的代表新规律的基本普适常数 $\hbar$ 正好就是普朗克常数. 事实上, 如略去(12)、(13)式中不太重要的纯数 A , 利用 c, k, σ 的实验值, 由(13)式即可估算出 $\hbar \sim 1.2 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, 这正是普朗克常数 $\left(\frac{h}{2\pi}\right)$ 的量级. 如按精确计算得到的(11)式, [相当于(12)、(13)式中取 $A = \frac{\pi^2}{15}$] 则如上所述可以算出

$$\hbar = 1.054\,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \quad h = 2\pi\hbar = 6.626\,2 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

这数值与普朗克常数的精密测量值非常接近.

例 试利用普朗克公式(9)求 $\rho(\omega)$ 极大值所对应的角频率 ω_m 与温度 T 的数值关系, 并估算热辐射场的光子数密度.

解: $\rho(\omega)$ 取极大值时, 满足极值条件 $\frac{\partial \rho}{\partial \omega} = 0$. 令 $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$, 极值条件亦即

$$\frac{d}{dx} \frac{x^3}{e^x - 1} = 0$$

由此得出 x 满足的方程为

$$\frac{x}{3} = 1 - e^{-x}$$

用数值解法可解出 $x = 2.821\,4$, 因此,

$$\frac{\hbar\omega_m}{kT} = 2.821\,4 \quad (14)$$

这正是维恩位移定律. 读者不难验证(14)式与(5)式是一致的.

由于辐射场的能量集中分布在 $\omega \sim \omega_m$ 附近, 所以光子数密度 (单位体积内光子数) 可以估计成

$$n \sim \frac{u}{\hbar\omega_m} \sim \frac{\pi^2}{15 \times 2.82} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \sim 0.23 \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \quad (15)$$

精确结果是

$$n = \int_0^\infty \frac{\rho(\omega)}{\hbar\omega} d\omega = 0.2436 \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \quad (16)$$

从量纲关系看, n 的构造式中只能包含 $kT, c, \hbar$, 它们的量纲是

$$n \text{——} L^{-3}, \quad kT \text{——} E, \quad \hbar c \text{——} EL$$

所以唯一可能的量纲构造关系是 $n \sim \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3$.

§ 1.2 光 子

1905年, 爱因斯坦将普朗克的量子假设发展成光量子(光子)的概念. 也正是这一年, 爱因斯坦创立了狭义相对论.

爱因斯坦认为, 电磁波(光波)的结构应该是量子化的, 其最小单元即一个光子, 每个光子均以同样的速度 c (光速) 运动. 频率为 ν 的光波, 其光子的能量和动量为

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (1)$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (2)$$

λ 为光波的波长. 光子的运动方向应该和光波的传播方向一致.

对于单色平面波, 如引入“波矢量” $\mathbf{k}$, 其方向为波的传播方向, 数值为 $k = |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, 则光子的动量可以表示成

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (3)$$

光和其他物质发生相互作用时, 基元过程通常表现为光子-电子作用或光子-原子作用, 利用光子的概念并对作用过程应用能量守恒定律和动量守恒定律, 一般就能够得出某些(但不是全部)重要结论.

1. 光电效应

某些金属受到光的照射后, 能够发射出电子, 形成电流, 这就是光电效应. 其物理机理可用光子概念解释如下. 金属中的“自由电子”要逸出金属表面, 需要克服“逸出功” W . 当金属受到频率为 ν 的光照射时, 自由电子即可吸收光子, 从而获得能量 $h\nu$ (电子同时或在短时间内连续吸收两个以上光子的机会极小, 可以不考虑这种可能性.) 如 $h\nu > W$, 电子就可以从金属中逸出, 并具有动能

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = h\nu - W \quad (4)$$

由此可见,光电子的动能完全由逸出功 W (由金属性质决定) 和入射光的频率 ν 所决定,而与光的强度无关. 光电子的数目则与入射光的强度成正比,即和入射光子的总数成正比. 对光电子动能的实验测量完全证实了爱因斯坦公式(4)的正确性. 由(4)式还可看出,当逸出功 W 给定后,入射光的频率 ν 必须超过 W/h ,才能产生光电效应;如 $\nu < \frac{W}{h}$,尽管光很强,也不会产生光电子. 这个结论也已被实验证实.

2. 康普顿散射

关于光子能量和动量的爱因斯坦公式(1)、(3),于1923年被康普顿(A. H. Compton)散射所证实. 实验发现,X射线被石蜡等轻物质散射时,波长增大. 经典电磁理论很难解释这现象. 康普顿利用光子的概念,并假定在光子-电子作用过程中,能量守恒定律和动量守恒定律成立,利用相对论力学,对散射过程作出了成功的理论分析.

X射线的光子能量,约在 10^3 eV 以上. 轻物质中外层电子的原子能级仅几个电子伏,可以当作自由电子. 设X射线的入射波长为 λ ,则入射光子的能量、动量为

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

电子初始动量为0,初始能量为 $m_e c^2$. 散射(碰撞)后,设光子沿 θ 方向射出,如图1-3,波长变为 λ' ,能量及动量变为

$$E' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'}$$

$$p' = \frac{E'}{c} = \frac{h\nu'}{c} = \frac{h}{\lambda'}$$

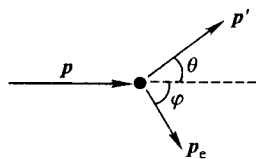


图 1-3

电子的反冲角设为 φ , 能量和动量设为 E_e 和 p_e , 按照相对论力学,

$$E_e^2 = c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4 \quad (5)$$

对散射过程应用能量守恒定律,得到

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + E_e$$

亦即

$$h(\nu - \nu') = E_e - m_e c^2 \quad (6)$$

对散射过程应用动量守恒定律,得到

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{p}_e \quad (7)$$

取平方,得到

$$p^2 + p'^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = p_e^2$$

亦即

$$h^2(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu'\cos\theta) = E_e^2 - m_e^2 c^4 \quad (8)$$

(6)式取平方,则得

$$h^2(\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu') = (E_e - m_e c^2)^2$$

与(8)式相消,得到

$$\begin{aligned} 2h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) &= 2m_e c^2(E_e - m_e c^2) \\ &= 2m_e c^2 h(\nu - \nu') \end{aligned}$$

因此,

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

亦即

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \quad (9)$$

经过散射,X射线的波长有所增加,增量 $(\lambda' - \lambda)$ 与散射角有关,并与 $\frac{h}{m_e c}$ 成比例,后者称为康普顿波长,记为 λ_e ,

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}. \quad (10)$$

对散射光波长的实验测量证实了(9)式的正确性. 因此,康普顿散射证实了:
(i) 光子的能量、动量公式(1)、(2)、(3)是正确的;(ii) 微观基元过程中,能量守恒定律和动量守恒定律成立;(iii) 相对论力学是正确的.

3. 粒子-反粒子对的湮没与产生

实验发现,电子(e^-)及其反粒子(正电子, e^+)相碰,可以湮没而产生两个 γ 光子,即

$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma + \gamma$$

根据相对论力学及能量、动量守恒定律,每个 γ 光子的能量至少等于电子的静能,即 $E_\gamma \geq m_e c^2$,相应的 γ 射线波长为

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} \leq \frac{h}{m_e c} = \lambda_e$$

这个关系已为实验所证实. 粒子物理的理论分析表明,能够产生上述湮没过程的电子、正电子距离,大致也是康普顿波长的量级.

在温度 T 下,热辐射光子的平均能量约为 $3kT$ (k 为玻耳兹曼常数). 按照近代天体物理理论,在宇宙形成的初期,温度极高,两个光子相碰,可能转变成(质子,反质子)对或(中子,反中子)对,按照能量守恒定律,有

$$E_\gamma \approx 3kT \approx m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$$

因此当时温度约为

$$T \approx m_p c^2 / 3k \approx 3.6 \times 10^{12} \text{ K}$$

§ 1.3 玻尔的量子论

1. 氢原子光谱

19 世纪后期,广泛进行了原子光谱的实验研究. 1885 年,巴尔末 (Balmer) 在氢原子光谱中发现了一个谱线系,其频率可以精确地表示成

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = cR \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (1)$$

其中

$$R = 10\,967\,758.1 \text{ m}^{-1} \text{ (里德伯常数)}$$

后来又发现了其他谱线系. 总的说,氢原子光谱全部谱线的频率可以归结成公式

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = cR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m < n \quad (m, n \text{ 为正整数}) \quad (2)$$

光谱公式虽然是经验公式,但是其精确度极高,为任何其他定量公式所不及. 因此有理由相信,在这些公式后面一定隐藏着某种深刻的物理规律.

2. 卢瑟福原子模型

1897 年,汤姆孙 (J. J. Thomson) 用测量荷质比 $\frac{e}{m_e}$ 的办法发现了电子. 1903 年,他顺理成章地提出了一种原子模型:原子的质量及正电荷均匀分布在球形体积中,球的半径即原子半径. 电子(质量 m_e , 远小于原子质量)在正电荷的库仑力