初中文化学习辅导

数学

熊大寅 樊恺
成应璪 张广德 编

湖北教育出版社

初中文化学习辅导

数　　学

《代数》　熊大寅　樊　恺
编
《几何》　成应璪　张广德

湖北教育出版社

初中文化学习辅导

数　学

（代数）熊大寅　樊　恺
（几何）成应森　张广德　编

·

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行
襄樊日报印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　13.25印张　291,000字
1984年12月第1版　1984年12月第1次印刷
印数：1—51,300

统一书号：7306·131　定价：1.55元

前　言

本书是根据全日制初中数学课本的基本要求和职工业余初中数学课本的内容编写的。因此，本书不仅可供全日制初中学生作复习参考，也可供知识青年、在职职工作补习指导。

考虑到各类读者的不同需要，我们对课本内容作了灵活处理，每章（节）都分为“基础知识”、“范例”、“习题”等三部分。

“基础知识”是课本中的主要概念、定理、公式、法则的小结，同时对一些重要的解题方法作了概括。

“范例”是典型问题的解答示范，其中尤其注意解题思路的分析和说明。

“习题”分（A）、（B）两组。（A）组是基本题；（B）组则是（A）组题的综合和提高，可根据情况选用。书末附有供自我考查的综合练习题。

对于那些不属于职工业余初中数学课本的要求范围，但却是现行全日制初中数学课本中要求必学的内容，在本书中一律加＊号区别，或在相应章节中加注说明，希望读者在使用本书时注意。

我们的主观愿望是：读者在学完本书后，能够基本掌握初中数学的基础知识，可以比较熟练地解决初中范围的数学问题。当然，这个愿望能否实现，就要靠读者的实践来检验了。

编　者

一九八三年十一月

目　录

代　数

几　　何

代　数

第一章　实　数

基础知识

一、实数的概念

1．实数的定义和分类

$$\text{实数}\begin{cases}\left.\begin{matrix}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\end{matrix}\right\}\text{有限小数或者无限循环小数}\\\left.\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

说明（1）整数和分数统称为有理数。任何一个有理数都可以写成有限小数或者无限循环小数的形式。例如：

$$3=3.0,\ -\frac{3}{5}=-0.6,\quad \frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1};$$

反过来也对，即任何有限小数和无限循环小数都是有理数①。

（2）无限不循环小数叫做无理数。

（3）有理数和无理数统称为实数。

（4）有理数和无理数都有正负之分，所以实数也有正

①无限循环小数化分数的方法将在高中学习。

实数和负实数之分。零既不是正数，也不是负数。正（实）数和零通常统称为非负（实）数。

2．数　轴

规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。

每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。这就是说，实数和数轴上的点一一对应。

3．相反数和绝对值

（1）相反数

只有符号不同的两个数，叫做互为相反数。

实数a（$a\neq 0$）和$-a$互为相反数，数轴上表示它们的点关于原点对称。

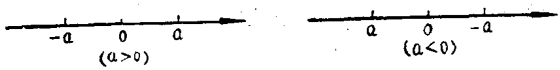


图1—1

零的相反数仍是零。

（2）绝对值

一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。即

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

一个实数的绝对值等于数轴上表示它的点到原点的距离，是一个非负实数。

4．实数大小的比较

正数都大于零；负数都小于零；正数大于一切负数。

两个负数，绝对值大的反而小。

数轴上的点，越往右边的点表示的数越大。

5．近似数和有效数字

一个近似数，四舍五入到哪一位，就说这个近似数精确到哪一位。这时，从左边第一个不是零的数字起，到这一位数字止，所有的数字都叫做这个数的有效数字。例如，对于$\lg 2=0.30102999\cdots$，取近似值0.3010，是精确到万分位（即精确到0.0001），有四个有效数字3、0、1、0。

在实数运算中，对于无理数可根据问题的要求，用近似的有限小数代替来进行计算。

6．绝对误差和相对误差①

一个近似数a和它的准确数A的差的绝对值

$\triangle=|a-A|$,

叫做这个近似数a的绝对误差（简称误差）。

一个近似数a的绝对误差△和它本身的比

$$r=\frac{\triangle}{a},$$

叫做这个近似数a的相对误差。相对误差通常写成百分数的形式，也叫百分误差。

二、实数的运算

1．实数的四则运算

（1）运算法则

说明（i）实数四则运算的结果仍是实数。

（ii）减法和加法互为逆运算。一切加法和减法的运

---

①这部分内容不必要求掌握。

运　算	两数同号		两数异号	
	符　号	绝对值	符　号	绝对值
加　法	保持原号	相　加	同绝对值较大的数	相　减
减　法	减去一个数，等于加上这个数的相反数			
乘　法	正	相　乘	负	相　乘
除　法	正	相　除	负	相　除

算，都可以统一成加法运算。

(iii) 除法和乘法互为逆运算。除以一个数，等于乘以这个数的倒数。零不能作除数。

（2）运算定律

(i) 交换律：$a+b=b+a$，$ab=ba$；

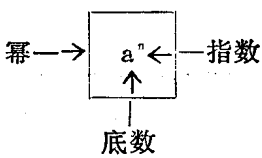
(ii) 结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，

$$(ab)c=a(bc)；$$

(iii) 分配律：$a(b+c)=ab+ac$。

2．实数的乘方

n（n是大于1的整数）个相同的因数a相乘，即 $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}$，叫做a的n次方，记作$a^n$。



这种求几个相同因数的积的运算，叫做乘方。实数乘方

的结果仍是实数：

（1）当$a>0$时，$a^n>0$；

（2）当$a=0$时，$a^n=0$；

（3）当$a<0$时，$a^n\begin{cases}<0 & (n\text{为奇数}),\\ >0 & (n\text{为偶数})。\end{cases}$

二次方也叫平方，三次方也叫立方。求平方数、立方数可以查“平方表”、“立方表”。

3．实数的开方

（1）开方和方根

如果$x^n=a$（n是大于1的整数），那么x叫做a的n次方根。求a的n次方根叫做把a开n次方，a叫做被开方数，n叫做根指数。

这种求一个数的方根的运算，叫做开方。开方和乘方互为逆运算。

在实数范围内，非负数的开方运算总可以实施，负数开奇次方也总可以实施，但是负数没有偶次方根。如下表：

a的正负	n的奇偶	方根	符号
$a>0$	n是奇数	有一个正的方根	$\sqrt[n]{a}$
	n是偶数	有两个互为相反数的方根	$\pm\sqrt[n]{a}$
$a=0$	n不论奇偶	$\sqrt[n]{0}=0$	
$a<0$	n是奇数	有一个负的方根	$\sqrt[n]{a}$
	n是偶数	没有方根	

求平方根、立方根可以查“平方根表”、“立方根表”。

（2）幂和方根的关系

（i） $(\sqrt[n]{a})^n=a$（n为偶数时，$a\geqslant 0$）。

特别地，当$n=2$时，有

$$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)。$$

例如，$(\sqrt{2})^2=2$，　$(\sqrt[3]{-2})^3=-2$。

（ii） $$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a & \text{（n为奇数），}\\ |a| & \text{（n为偶数）。}\end{cases}$$

特别地，当$n=2$时，有

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0)。\end{cases}$$

例如，$\sqrt{2^2}=2$，$\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$，$\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$。

（3）算术根

正数a的正的n次方根，叫做a的n次算术根。零的n次算术根仍是零。

这就是说，当$a\geqslant 0$时，符号$\sqrt[n]{a}$表示a的n次算术根。

4．实数的混和运算顺序

先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减；在同一级运算中，从左到右依次运算；如果有括号，就先算括号里面的运算。

此外，根据实数的运算定律，上述运算顺序也可以变更。

范　例

例1 下列有理数中，哪些是整数？哪些是分数？哪些是正数？哪些是负数？把它们分别填在用大括号表示的相应的

集合里：

$$-5,\ +11,\ -\frac{1}{3},+0.001,0,\frac{1}{2},\ -10,\ 5,\ -0.35。$$

〔**解**〕 整数集合：$\{-5,+11,\ 0,\ -10,5,\cdots\}$；

分数集合：$\{-\frac{1}{3},+0.001,\frac{1}{2},-0.35,\cdots\}$；

正数集合：$\{+11,\ +0.001,\ \frac{1}{2},\ 5,\ \cdots\}$；

负数集合：$\{-5,\ -\frac{1}{3},-10,-0.35,\cdots\}$。

说明 要注意"正"与"整"的区别。"正"是相对于"负"来说的，而"整"则是相对于"分"来说的。另外，还要注意"零"既不是正数，也不是负数，但却是整数。

例2 用数轴上的点表示下列各实数，并把它们按从小到大的顺序用不等号连接起来：

$$-\left(-2\frac{2}{3}\right),-|1.75|,0,-2,\sqrt{3},-\frac{1}{2}|-\sqrt{2}|。$$

〔**解**〕 如图1—2，数轴上的A、B、O、C、D、E各点分别表示$-\left(-2\frac{2}{3}\right)$，$-|1.75|$，$0$，$-2$，$\sqrt{3}$，$-\frac{1}{2}|-\sqrt{2}|$。它们之间的大小顺序为：

$$-2<-|1.75|<-\frac{1}{2}|-\sqrt{2}|<0<\sqrt{3}<-\left(-2\frac{2}{3}\right)。$$

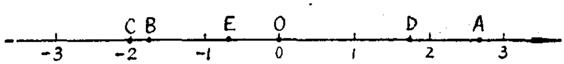


图 1—2

说明 $\sqrt{3}$和$-\frac{1}{2}|-\sqrt{2}|$是无理数，可以通过取近似值，如取$\sqrt{3}\approx1.73$，$-\frac{1}{2}|-\sqrt{2}|\approx-0.71$，从而确定数轴上的D、E两点的大致位置。也可以用几何作图的的方法，准确地在数轴上确定D、E两点的位置。例如，由$\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1^2}$，可根据勾股定理，如图1—3在数轴上得到D点。

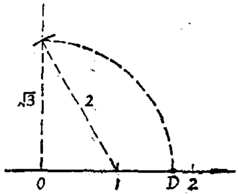


图 1—3

例3 比较$-\sqrt{0.0331}$和$-\frac{2}{11}$的大小。

分析 为比较$-\sqrt{0.0331}$和$-\frac{2}{11}$的大小，须比较$\sqrt{0.0331}$和$\frac{2}{11}$的大小，这就要把它们都用小数的形式表示出来。但求平方根较难计算，为此可考虑从比较这两数的平方数的大小入手。

〔**解**〕$\because\ (\sqrt{0.0331})^2=0.0331$，　$(\frac{2}{11})^2=\frac{4}{121}\approx0.03306$，

$\therefore\ (\sqrt{0.0331})^2>(\frac{2}{11})^2$，$\sqrt{0.0331}>\frac{2}{11}$。

$\therefore -\sqrt{0.0331}<-\frac{2}{11}$。

例4 当a是什么实数时，有

（1）$|a-3|=2$；　　（2）$|a-3|=0$；

（3）$|a-3|=-2$。

〔**解**〕（1）$\because|a-3|=2$，$\therefore a-3=\pm2$。

$\therefore$ $a=5$或$a=1$。

（2）$\because |a-3|=0$，$\therefore a-3=0$，$a=3$。

（3）因为任何实数的绝对值是非负数，所以不存在实数a，使$|a-3|=-2$。

说明 解第（1）题时应注意，不要遗漏了$a-3=-2$这种情况。

例5 计算：

（1）$3.56-(-3)-(-5\frac{1}{2})+(-2)-(+5\frac{1}{4})-(+4.56)$；

（2）$(-1\frac{1}{2})\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times(-\frac{3}{5})$。

〔**解**〕（1）原式$=3.56+3+5\frac{1}{2}-2-5\frac{1}{4}-4.56$

$=3.56-4.56+3-2+5\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}$

$=-1+1+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$；

（2）原式$=(-\frac{3}{2})\times\frac{4}{3}\times(-\frac{1}{5})\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times(-\frac{3}{5})$

$=-\frac{3\times4\times1\times7\times5\times3}{2\times3\times5\times4\times7\times5}=-\frac{3}{10}$。

说明（1）加减混合运算可统一成连加的形式（通常加号省略不写），并根据情况利用交换律、结合律对所有加数重新组合，如按正数、负数先分别合并，或按整数、小数、分数先分别合并等。但如果加数中出现互为相反数，则可把它们先行消去。

（2）乘除混合运算可统一成连乘的形式，连乘积（不等于零时）的符号由负因数的个数决定：当负因数有偶数个时，积为正；当负因数有奇数个时，积为负。

例6 计算：

（1）$\left[36\div\left(-1\frac{2}{7}\right)^3\times2\frac{25}{28}-(-2.5)^2\div\sqrt{0.0625}\right]\div\sqrt[3]{-0.027}$；

（2）$\dfrac{3\frac{1}{2}\div2\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{17}-0.125\div\frac{17}{3}}{1.25\div5\frac{2}{3}}$。

〔解〕

（1）原式 $=\left[36\times\left(-\frac{7^3}{9^3}\right)\times\frac{81}{28}-\left(\frac{5}{2}\right)^2\div0.25\right]\div(-0.3)$

$=\left[-7^2-\frac{25}{4}\times4\right]\div(-0.3)$

$=[-49-25]\div(-0.3)$

$=(-74)\div(-0.3)$

$=246\frac{2}{3}$；

（2）原式$=\dfrac{\left(\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\times\frac{3}{17}}{\frac{5}{4}\times\frac{3}{17}}=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{4}}$

$=\dfrac{6-1}{10}=\dfrac{1}{2}$。

说明 在进行实数的混合运算时，要注意运算顺序。但在有些情况下，若能运用实数的运算定律或运算性质，往往可以使运算得到简化。如在解第（2）题时，我们就运用了分配律和分数的基本性质。

例7 一个冷冻厂的库房的室温是－2℃，现有一批物品需要在－24℃下冷藏。若冷冻设备能使库房的温度每小时下降4℃，问经过几小时才能降到所要求的温度？

分析 温度变化有“上升”和“下降”，时间变化则有“以后”和“以前”。按习惯我们把“上升的温度”，“以后的时间”用正数表示，把“下降的温度”，“以前的时间”用负数表示，这样问题就可以用正负数的四则计算来解决。

〔**解**〕 $[(-24)-(-2)]\div(-4)$

$=(-22)\div(-4)=+5.5$（小时）。

这就是说，5.5小时以后库房温度才能降到所要求的温度。

例8 怎样的实数x，能使$|x-3|+\sqrt{(x-8)^2}=5$成立？

〔**解**〕原式即$|x-3|+|x-8|=5$。

如图1—4，把数轴分成三段$x<3$，$3\leqslant x<8$和$x\geqslant 8$来讨论。