成人高校理工科基础课教材

简明高等数学

下册

陈广义 主编

东北师范大学出版社

成人高校理工科基础课教材

简明高等数学

下册

陈广义 主编

东北师范大学出版社

内容简介

本书是由全国一些成人高等院校经上海、长春南湖两次会议确定编写的成人高校理工科基础课教材之一。

本书内容包括：无穷级数、矢量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线与曲面积分等。每章开头均有内容提要，章后有包括内容小结、几点注意、例题选解在内的学习指导和习题、习题答案。

本书内容通俗易懂、重点突出，既照顾了知识的系统性和科学性，又廉顾了通俗性，因此，它是一本成人理工科基础课较为理想的教材。

[illegible]高等数学

陈广义 主编

东北师范大学出版社出版
（吉林省长春市斯大林大街自由广场）
吉林省新华书店发行
吉林科技大学印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32　印张11.625　字数：255,000
1986年8月第一版　1986年8月第一次印刷
印数：1—9,000
统一书号：13334·14　定价：2.25元

前　言

近年来，我国成人高等教育发展很快，教学中遇到的难题之一就是缺少一套具有适合成人大专院校特点的教材。为此，一九八五年四月全国一些成人高等院校在上海召开会议，会议上商定尽快编写一套成人高校理工科基础课教材。经过认真准备，于同年六月在长春市南湖召开了本套教材的编写会议，与会同志以原教育部颁发的成人高校理工专科教学计划和各科教学大纲为依据，经过充分研究讨论，制定出本套教材编写的指导思想和基本原则以及各学科的编写大纲和细则。本书就是这次会议确定编写的教材之一。

本书内容包括：无穷级数、矢量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分等。

在编写本书过程中，考虑到成人的特点及理工科教学的实际，我们对教材内容作了认真精选，在照顾到知识的全面性和系统性的同时，又尽量突出重点，作到了少而精。

考虑到成人学员除工作外能用于学习的时间较少，与教师的联系不多，同学之间相互交流也不方便的困难。为了便于自学，本书在叙述上力求通俗易懂，详细，并且每章前都有内容提要，章后有学习指导，内容包括：内容小结、几点注意、例题选解。最后有习题及习题答案，既可供教师讲课（或习题课）时选用，又可供学员课后练习。

为了便于读者记忆，系统全面掌握所学知识，在内容小结的格式上尽量采取表格化，作到格式新颖。

书中带有“*”的内容，非理工专业可以不讲。

参加编写的有：金嘉华、计惠康（第九章）、尹晓荣（第十章）、张天纪（第十一章）、周富（第十二章及第十三章一部分）、徐力（第十三章一部分）等。初稿形成后由吉林职业师范学院陈广义统撰、定稿。

本书全部插图由陈岩波同志绘制。

吉林工业大学冯鹏起副教授主审。

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免会出现不少缺点，欢迎广大读者批评指正。

编　　者

一九八六年三月

目　　录

第九章　无穷级数……………………………………（1）

§9.1　数项级数及其性质 ………………………（2）

一　数项级数的概念（2）二　收敛级数的性质（5）

§9.2　数项级数收敛性判别法 …………………（8）

一　级数收敛的必要条件（8）二　正项级数及收敛性判别法(10)三　交错级数及其收敛性判别法（20）四　绝对收敛与条件收敛（23）

§9.3　幂级数 ……………………………………（25）

一　函数项级数的一般概念（26）二　幂级数及其收敛性（27）三　幂级数和函数的分析性质（32）

§9.4　函数展开成幂级数 ………………………（37）

一　泰勒级数（37）二　函数展开成幂级数（40）

§9.5*　付立叶级数……………………………（47）

一　三角级数、三角函数系的正交性（47）二　函数展开为付立叶级数（49）

§9.6*　正弦级数和余弦级数………………………（57）

一　奇函数和偶函数的付立叶级数（57）二　函数展开成正弦级数或余弦级数（60）

§9.7*　周期为$2l$的周期函数的付立叶级数………（64）

学习指导……………………………………………（68）

一　内容小结（68）二　几点注意(72)三　例解题选（74）

习　　题……………………………………………（91）

第十章　矢量代数与空间解析几何…………………（96）

§10.1　空间直角座标系……………………………（97）

一　空间点的直角坐标（97）二　空间两点间的距离（99）
§10.2　矢量及其加减法、矢量与数量的乘积……（102）
一　矢量的概念（102）二　矢量的加减法（103）三　矢量与数量的乘积（104）
§10.3　矢量的坐标……………………………………（107）
一　矢量在轴上的投影及投影定理（107）二　矢量在坐标轴上的分矢量及矢量坐标（109）三　矢量的模与方向余弦的坐标表示式（113）
§10.4　数量积、矢量积……………………………（115）
一　两个矢量的数量积（115）二　两个矢量的矢量积（118）
§10.5　平面及其方程………………………………（122）
一　平面的点法式方程（122）二　平面的一般方程（124）三　两平面的夹角（127）
§10.6　空间直线的方程……………………………（129）
一　空间直线的方程（129）二　两直线的夹角（131）三　直线与平面的夹角（133）
§10.7　曲面及其方程………………………………（135）
一　曲面方程的概念（135）二　旋转曲面（137）三　柱面（140）
§10.8　空间曲线及其方程…………………………（141）
一　空间曲线的一般方程（141）二　空间曲线的参数方程（143）
§10.9　二次曲面及其截痕法………………………（145）
学习指导……………………………………………（148）
一　内容小结（148）二　几点注意（152）三　例题选解…（159）

习　题……………………………………………………(167)
第十一章　多元函数微分法及其应用…………………(177)
§11.1　多元函数的有关概念…………………………(178)
一　多元函数概念（178）二　二元函数的极限与连续（182）
§11.2　偏导数与全微分………………………………(185)
一　偏导数(185)二　高阶偏导数(189)三　全微分(191)
§11.3　二元复合函数的求导法则……………………(195)
§11.4　二元函数的最大值和最小值…………………(199)
学习指导…………………………………………………(205)
一　内容小结(205)二　几点注意(208)三　例题选解(210)
习　题……………………………………………………(220)
第十二章　重积分………………………………………(226)
§12.1　二重积分的概念及其性质……………………(227)
一　二重积分的概念(227）二　二重积分的性质(231)
§12.2　二重积分的计算………………………………(233)
一　利用直角坐标计算二重积分(233）二　利用极坐标计算二重积分（242)
§12.3　二重积分的应用………………………………(248)
一　曲面的面积(249）二　平面薄片的重心(252）三　平面薄片的转动惯量（255)
§12.4　三重积分的概念和计算………………………(256)
一　三重积分的概念(256）二　在直角坐标系中计算三重积分(258）三　在柱坐标系中计算三重积分(261）四　在球坐标系中计算三重积分(264)
学习指导…………………………………………………(269)
一　内容小结(269)二　几点注意(270)三　例题选解(273)

习　　题……………………………………………………(283)
第十三章　曲线积分与曲面积分……………………………(289)
§13.1　第一型曲线积分……………………………………(290)
一　第一型曲线积分的概念(290)　二　第一型曲线积分的性质(292)　三　第一型曲线积分的计算(292)
§13.2　第二型曲线积分……………………………………(294)
一　第二型曲线积分的概念（294）　二　第二型曲线积分的性质(297)　三　第二型曲线积分的计算(299)
§13.3　格林公式……………………………………………(304)
§13.4*　第一型曲面积分…………………………………(310)
一　第一型曲面积分的定义(310)　二　第一型曲面积分的性质(311)　三　第一型曲面积分的计算(312)
§13.5*　第二型曲面积分…………………………………(316)
一　第二型曲面积分的定义(316)　二　第二型曲面积分的性质(318)　三　第二型曲面积分的计算(318)
学习指导…………………………………………………(325)
一　内容小结(325)二　几点注意(328)三　例题选解(331)
习　　题…………………………………………………(340)
习题答案及提示…………………………………………(344)

第九章　无穷级数

无穷级数是研究函数的一个重要工具，无论在抽象理论还是在应用科学中，它都处于重要的地位；所谓的无穷级数就是无穷多个数（或函数）和的形式，我们将利用极限方法给出其概念、研究其性质、建立其判别法，以及它的应用。无穷级数可分为数项级数和函数项级数两大类，对于函数项级数，在本章里将论讨幂级数和付立叶级数，它们是无穷级数的两个重要组成部分，数项线数是研究函数项级数的基础。幂级数可以用来表示、研究函数及作数值计算。付立叶级数是研究非正弦周期函数的有力工具，在电子技术及其它周期性物理现象的研究中有着非常重要的应用。本章将要研究的内容如下：

1、在数项级数中，要给出数项级数收敛与发散的概念；介绍收敛级数的性质；建立用来判别级

数收敛与发散的判别法。

2、在幂级数中，要给出幂级数收敛区间的概念及要求；介绍和函数的分析性质；以及把一些初等函数展开成幂级数的方法。

3、在付立叶级数中，要给出三角级数和三角函数系正交性的概念；建立收敛定理；介绍一些函数展开成付立叶级数（含正，余弦级数）的方法。

§9.1 数项级数及其性质

一 数项级数的概念

如果把数列

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

的各项依次用加号连接起来，即

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{9.1}$$

称为**数项级数**，或**无穷级数**。并把和式（9.1）简记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

其中u_n称为级数（9.1）的**通项**。而

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

称为级数的**前n项部分和**，简称为**部分和**。

定义 如果级数（9.1）的前n项部分和所构成的数列$\{S_n\}$存在极限，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S$$

存在，则称级数（9.1）**收敛**；将其极限值S叫做级数(9.1)的**和**；否则，称级数（9.1）为**发散**。

很明显，当级数（9.1）收敛时，其部分和S_n是级数和S的近似值，其差

$$r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

叫做级数的**余项**。

例1 讨论等比级数（即几何级数）

$$a+ag+ag^2+\cdots+ag^{n-1}+\cdots \qquad (9.2)$$

的敛散性，其中g为公比，$a\neq 0$。

解 由初等数学得知，这个级数的前n项部分和为

$$S_n=\begin{cases} na, & g=1 \\ \dfrac{a-ag^n}{1-g}, & g\neq 1 \end{cases}$$

当$|g|<1$时，由$\lim\limits_{n\to\infty} g^n=0$，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a-ag^n}{1-g}=\frac{a}{1-g}$$

此时级数（9.2）收敛，其和为$\frac{a}{1-g}$；

当$|g|>1$时，由$\lim_{n\to\infty} g^n=\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a-ag^n}{1-g}=\infty$$

此时级数（9.2）发散；

当$g=1$时，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(na)=\infty$$

此时级数（9.2）发散，

当$g=-1$时，级数为

$$a-a+a-a+\cdots$$

$$S_n=\begin{cases}0, & n\text{为偶数}\\ a, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

显然$\lim_{n\to\infty} S_n$不存在，此时级数（9.2）也发散。

总之，等比级数当公比$|g|<1$时收敛，其和为$\frac{a}{1-g}$，当公比$|g|\geqslant 1$时为发散。

例2 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

收敛，并求其和。

证明 由级数的前n项部分和S_n可表为

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

且有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

故级数收敛，其和等于1。

例3 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

是发散的。

证明 我们虽然不能求出这级数前n项部分和S_n的简洁的表达式，却能用"缩小法"建立如下不等式

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$，可推得$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，故该级数发散。

二 收敛级数的性质

依据数项级数收敛的概念，可得出收敛级数的如下性质。

性质 1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$皆收敛，且其和分别为S和T，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛，其和为$S\pm T$。即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n$$

证明 记级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$的前n项部分和为S_n和T_n，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$的前$n$项部分和为

$$\begin{aligned}\sigma_n&=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)\\&=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)\\&=S_n\pm T_n\end{aligned}$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$得知

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(S_n\pm T_n)=\lim_{n\to\infty}S_n\pm\lim_{n\to\infty}T_n=S\pm T$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$收敛，其和为$S\pm T$。

性质 2 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其和为S，k是任意一常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(ku_n)$也收敛，其和为$kS$。即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ku_n)=k\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

证明 记级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的和及前n项部分和为S及S_n，且有

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$。而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(ku_n)$的前$n$项部分和可表为

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (ku_1)+(ku_2)+\cdots+(ku_n)\\ &= k(u_1+u_2+\cdots+u_n)\\ &= kS_n\end{aligned}$$

从而得

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}(kS_n) = k\cdot\lim_{n\to\infty}S_n = kS$$

故证得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(ku_n)$也收敛，其和为$kS$。

性质3 如果级数（9.1）收敛，在其前面去掉有限项或加上有限项，则不会改变级数的收敛性。

证明 将级数去掉前k项得级数

$$u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$$

而所得的级数的部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots+u_{k+n} = S_{k+n}-S_n$$

其中S_{k+1}是级数（9.1）前$k+n$项的部分和，而S_k为常数，当$n\to\infty$时，σ_n与S_{k+n}同时存在极限，且有等式

$$\sigma = S - S_k$$

其中$\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$，$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_{k+n}$。

同理可证明在级数（9.1）前面加有限项的情形。

类似可证，如果级数（9.1）发散，在其前面去掉有限项，或加上有限项，则不会改变级数的发散性。

性质4 在收敛的级数中，任意加括号后所得到的级数仍收敛，且其和不变。

证明 设级数（9.1）收敛，其和为S，在其中任意加

上括号得到新级数为（不妨认为）：

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

设新级数的前m项部分和为σ_m，而对应于σ_m的原级数的和为S_n，即$\sigma_m=S_n$，显然，当$m\to\infty$时，$n\to\infty$，从而有

$$\lim_{n\to+\infty}\sigma_m=\lim_{n\to+\infty}S_n=S$$

说明新级数收敛，其和也是S。

§9.2 数项级数收敛性判别法

在§9.1中我们讨论了数项级数的有关概念，并介绍了收敛级数的有关性质。然而，必须指出，直接从定义出发判定级数的收敛性通常不是简单易行的，因为级数的前n项和S_n很可能是非常复杂的。为此要求我们建立数项级数收敛性判别法，它将是本节讨论的中心。

一 级数收敛的必要条件

定理9.1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则它的一般项u_n当n趋向无穷大时而趋于零，即

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

证明 设这个级数的和为S，前n项部分和为S_n，由

$$u_n=S_n-S_{n-1}\quad 及\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}S_{n-1}=S$$

得

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to+\infty}S_n-\lim_{n\to+\infty}S_{n-1}$$