

量子力学新进展

第一辑

曾谨言 裴寿镛 主编

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

量子力学新进展. 第1辑/曾谨言, 裴寿镛主编. —北京: 北京大学出版社, 2000. 7

ISBN 7-301-04624-3

I. 量… II. ①曾… ②裴… III. 量子力学-研究-文集
IV. 0413. 1-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 65043 号

书 名: 量子力学新进展(第一辑)

著作责任者: 曾谨言 裴寿镛 主编

责任编辑: 周月梅

标准书号: ISBN 7-301-04624-3/O · 479

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 理科编辑部 62753160

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

排 版 者: 北京高新特公司照排中心

印 刷 者: 中国科学院印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

850×1168 32 开本 10.875 印张 282 千字

2000 年 7 月第 1 版 2000 年 7 月第 1 次印刷

定 价: 22.00 元

序 言

20 世纪物理学的革命是建立了相对论和量子力学,从根本上改变了人们关于时间、空间、物质和运动的概念。没有量子力学,就没有当代物理学,也就没有与当代物理学联系在一起的当代技术。但是,量子力学从它刚刚诞生时起,关于如何理解它的基本概念、基本图象和基本规律?它是不是一个完备的物理理论?就一直有深刻的、剧烈的争论。本世纪最伟大的物理学家 Einstein 和 Bohr 之间长达几十年的争论是大家熟知的。这种争论直到现在也没有平息。著名的美国物理学家 Feynman 说:“我确信没有一个人理解量子力学。”另一位也很著名的美国物理学家 Wheeler 在评论粒子物理的标准模型时说:“最令人惊讶的是量子力学还是正确的。”这就表明了这种争论的深刻性和它的影响。

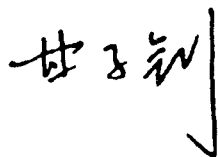
但是,要感谢物理学和物理实验技术的进展,最近 20 年来,这种争论已不再仅仅是思辩性的争论,而是发展成为直接依靠实验的实证研究了。1982 年巴黎大学的 Aspect 和他的助手用光学实验来检验 Bell 不等式和讨论 Einstein-Podolsky-Rosen 效应是这种进展的标志性开端。现在已经出现了许多不同类型和不同程度上,用实验直接检验和探讨量子力学的基本概念和基本图象的研究工作及其相应的理论分析,揭示出一系列原则上全新的、从经典物理的观念不可能得到理解的物理现象。这类关于量子力学基础的研究工作现在已成为当代物理学中一个非常活跃、非常有基本意义、甚至会产生革命性进展的领域。无疑,这类研究工作的进展也会对人类社会的思想意识和文化产生巨大的影响。

这类实证研究的重要还不仅仅是会导致对量子力学的基本概念和图象理解的深化,而且,结合当代电子学、光学、信息科学、材

料科学以及当代工艺技术的成就,它们还有可能导致发展出直接基于量子力学原则的全新的技术部门。现在,科学界多数人都不怀疑,在 21 世纪,这类直接基于量子力学原则的技术部门会成为影响到每个人日常生活的技术,就像当代的半导体科学技术和激光科学技术已是影响我们每个人日常生活的技术似的。也许可以说,这将是 21 世纪科学技术一个最引人入胜的发展。

作为一个物理教师,我们都有这样的体会,整个当代物理学教学的关键就在于量子力学的教学。这不仅仅是对物理系的教学,而且对化学、材料科学、生命科学、工程科学、地球科学等系科的教学,也是同样的。怎样充分利用人们在认识量子力学的基本概念、基本规律和基本物理图象上取得的成就,特别是最近 20 年来取得的成就,使学生能比较准确、迅速而且有一定深度地学习量子力学,这无疑是教学改革的一个带根本性的问题。

正是基于这样的认识,曾谨言教授、葛墨林教授、我、还有北京大学物理系、清华大学物理系和南开大学数学研究所的同事们,举行了量子力学研究和教学报告会和研讨会。在会上各方面的同事讲了一些专题。这本文集收集了其中一部分,作者都是对有关问题很有研究的专家,文章的风格又是可以面对不同层次的读者的。我作为这些文章的头一批读者,读后感到很有收获,愿意在这里推荐给有志于研究量子力学的基本问题和量子力学课程的教学的同志,相信一定会对您了解和开始进入这个非常有意义而又非常引人入胜的领域大有裨益。

A handwritten signature in black ink, which appears to be '葛墨林' (Ge Mulin), enclosed within a simple rectangular frame.

北京大学物理系

2000 年 4 月

目 录

序言	甘子钊
纠缠态	曾谨言 裴寿鏞(1)
杨模型和 Bethe Ansatz	徐 湛(46)
量子退相干问题	孙昌璞 衣学喜 周端陆 郁司夏(59)
光场压缩态的产生及其应用	彭堃堦(131)
量子霍耳效应及其最新进展	虞 跃(168)
零点能与卡斯米尔-玻德勒效应	葛墨林(232)
量子信息引论	郭光灿(249)
量子测量和量子计算简述	张永德(286)

纠缠态

曾谨言

裴寿镛

北京大学物理系 北京师范大学物理系

内 容

一、本征态,叠加态,纠缠态

二、自旋为 $1/2$ 的二粒子的自旋纠缠态, Bell 基

三、光子偏振态与双光子纠缠态

四、EPR 佯谬

五、Bell 不等式与实验检验,定域性隐变量

六、Schrödinger 猫态及其在介观尺度上的实现

七、双缝干涉与“which way”实验

八、波函数统计诠释的进一步理解

九、纠缠态在量子远程通讯中的应用

附录

A. 1 密度算符与密度矩阵

A. 2 混合态的密度矩阵

A. 3 复合体系,约化密度矩阵

参考文献

纠缠态(entangled state)一词近来常常出现在量子力学文献中. 从历史上讲, 纠缠态的概念最早是在著名的“Schrödinger”猫态^[1]一文中提出来的, 而在先于它发表的“EPR (Einstein-Podolsky-Rosen)”佯谬^[2]一文中, 事实上已使用了这一概念. Schrödinger 一文中所讨论的关于猫态的假想实验(gedanken experiment)中给出的波函数就是一个纠缠态, EPR 佯谬一文中给出的二粒子体系的波函数也是一个纠缠态. 以上两篇文章对量子力学的基本原理和概念的正统诠释(Copenhagen 诠释)提出了激烈的批评. 他们的批评一方面促进了人们对量子力学的基本概念做更深刻的探讨, 另一方面也使人们逐渐搞清了他们对正统量子力学的责难, 究竟问题出在何处. 纠缠态是量子力学多体系(或多自由度体系)的一种特殊形式的, 但又是普遍存在的量子态, 只不过 Schrödinger 和 EPR 两文发表之前, 它的非经典特性尚未被人们注意到. 现在, 纠缠态的概念已经开始展现其广泛的应用前景(例如量子信息论). 为阐明纠缠态这个概念, 我们先回顾一下有关量子态的一些基本概念. 这些概念看似简单, 但是人们对它们的理解往往是不全面的.

一、本征态, 叠加态, 纠缠态

本征态(eigenstate)

量子力学中, 一个可观测量用一个线性自轭算符($\hat{F}^+ = \hat{F}$)刻画, 其本征方程表示为

$$\hat{F}|n\rangle = F_n|n\rangle, \quad (1)$$

$F_n = F_n^*$ (实) 为 $\hat{F}$ 的一个本征值, $|n\rangle$ 为相应的本征态. 在 $|n\rangle$ 态下测量 F 时, 将得到一个确切的结果(概率=1), 即本征值 F_n . 例如 Hamilton 量(不显含时) $\hat{H}$, 其本征方程(即不含时 Schrödinger 方程)为

$$\hat{H}|n\rangle = E|n\rangle, \quad (2)$$

E_n 为能量本征值, 能量本征态 $|n\rangle$ 常称为**定态**(stationary state).

对于多自由度或多粒子体系, $\hat{H}$ 并不构成**力学量完全集**(a complete set of observables). 所谓力学量完全集, 是指体系的一组力学量, 它们两两彼此对易, 而它们的共同本征态(simultaneous eigenstate)又足以把体系的量子态完全确定下来. 此时式(1)中的 $\hat{F}$, 可理解为包含 $\hat{H}$ 在内的一组力学量完全集, 而 n 代表一组量子数. 如果完全集中所有的力学量都是守恒量, 则称为守恒量完全集. 此时 n 称为一组好量子数(good quantum numbers).

按量子态叠加原理, 体系的任何一个量子态 $|\psi\rangle$ 均可表示成力学量完全集 $\hat{F}$ 的共同本征态的线性叠加, 即

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle, \quad C_n = \langle n | \psi \rangle. \quad (3)$$

叠加态(superposed state)

本征态的任意线性叠加, 就构成一个叠加态. 例如一维谐振子

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (4)$$

就是一个叠加态. 在此态下, 测量谐振子的能量时, 所得结果是不确定的, 或为 $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, 或为 $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$, 概率均为 $1/2$. 能量本征态的叠加, 常称为**非定态**(nonstationary state). 初学者对于非定态的概念大多可以接受. 然而, **本征态的叠加所导致的测量结果的不确定性, 完全是一种量子效应, 并无经典对应**^[3]. 这是量子力学中最难理解, 也是常常被人误解的基本概念. 后面将要讨论的量子力学中的非定域性(nonlocality), 实际上就是叠加原理的一个具体表现. 纠缠态中出现的各种离奇性质, 均源于此. 例如, 粒子坐标本征态(在坐标表象中)表示为 $\langle x | x_1 \rangle = \psi_{x_1}(x) = \delta(x - x_1)$, 坐标本征值为 x_1 , 在此状态下测量粒子坐标, 得到的结果是完全确定的, 即 x_1 . 而对于叠加态 $\psi(x) = \delta(x - x_1) + \delta(x - x_2)$, 测量粒子的坐标的结果, 就是不确定的, 即, 或为 x_1 , 或为 x_2 .

但应强调,本征态与叠加态之分,要根据所讨论的力学量来判断. 即一个力学量的本征态,往往是另一个力学量(本征态)的叠加态(它们的共同本征态除外). 例如,一个粒子坐标的本征态(本征值 x_0)

$$\psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ip(x-x_0)/\hbar}, \quad (5)$$

它就是无穷多个动量本征态 $e^{ip(x-x_0)/\hbar}$ (动量的本征值为 p) 的叠加,因此,测量动量的结果将是完全不确定的.

纠缠态(entangled state)

考虑体系 A 和 B 组成的二体系. 设 A 的一组力学量完全集的共同本征态记为 $|n\rangle$, n 代表一组完备量子数, B 的一组力学量完全集的共同本征态记为 $|v\rangle$, v 代表一组完备量子数, 则 $|n\rangle_A \otimes |v\rangle_B$ (直积形式, 简记为 $|n\rangle_A |v\rangle_B$) 可以作为复合体系 $A+B$ 的一个完备基, 复合体系的任意量子态 $|\psi\rangle_{AB}$ 可以表示成它们的线性叠加

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{nv} C_{nv} |n\rangle_A |v\rangle_B. \quad (6)$$

二体系的不能表示成一个直积形式的态, 称为二体系的纠缠态, 而直积形式的量子态, 例如 $|n\rangle_A |v\rangle_B$ 态 (n, v 任意), 则称为非纠缠态.

以上讨论可以推广到多体系或多自由度体系. 可以看出, 多体系的量子态的最普遍的形式是纠缠态, 而能表示成直积形式的非纠缠态只是一种很特殊的量子态. 对于一个多自由度的体系, 对应于不同的自由度的力学量(彼此对易)的本征态的直积, 也称为多自由度体系的一个非纠缠态, 而体系的一般状态则是这种直积形式的量子态的线性叠加, 这就构成纠缠态, 用以描述不同自由度的量子态之间的纠缠.

例如 EPR 佯谬一文^[2]给出的两个一维粒子的量子态(见文献[2]式(9))

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ip(x_1 - x_2 + x_0)/\hbar} \\ = 2\pi \hbar \delta(x_1 - x_2 + x_0), \quad (7)$$

就是一个纠缠态, 式中 $e^{ip(x_1 - x_2 + x_0)/\hbar}$ 是粒子①和粒子②的动量本征态的直积. Schrödinger 猫态(见 § 6 式(63))

$$|\psi\rangle = \alpha |\text{活猫}\rangle |\uparrow\rangle + \beta |\text{死猫}\rangle |\downarrow\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (8)$$

就是猫与放射性原子这个复合体系的纠缠态.

下面我们将看到多体系的纠缠态展现出许多按日常生活经验难以理解的非经典特性.

二、自旋为 1/2 的二粒子的自旋纠缠态, Bell 基

对于自旋为 1/2 ($\hbar=1$) 的一个粒子, 它的两个自旋态可以用 s_z 的本征值 ($m = \pm 1/2$) 来标记. 记为 $\left| \frac{1}{2} \right\rangle = |\uparrow\rangle$ 和 $\left| -\frac{1}{2} \right\rangle = |\downarrow\rangle$. 对于自旋为 1/2 的二粒子组成的体系的自旋态, 在角动量耦合理论中, 通常采用角动量耦合表象和非耦合表象来描述. 所谓非耦合表象, 是以两粒子体系 (A 和 B) 的自旋力学量完全集 (s_z^A, s_z^B) 的 4 个共同本征态为基矢的表象, 即

$$|m_A m_B\rangle = |m\rangle_A |m'\rangle_B = |1/2\rangle_A |1/2\rangle_B, \quad |1/2\rangle_A | -1/2\rangle_B, \\ | -1/2\rangle_A |1/2\rangle_B, \quad | -1/2\rangle_A | -1/2\rangle_B,$$

或形象地记为

$$|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B, |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B, |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B, |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B, \quad (9)$$

它们都是两个单粒子自旋态的直积形式, 都不是纠缠态.

所谓角动量耦合表象, 是以自旋力学量完全集 S^2, S_z 的共同本征态为基矢的表象 ($\mathbf{S} = \mathbf{s}^A + \mathbf{s}^B$), 记为 χ_{SM}

$$\begin{cases} S^2 \chi_{SM} = S(S+1) \chi_{SM}, & S = 0, 1, \\ S_z \chi_{SM} = M \chi_{SM} \end{cases} \quad (10)$$

$$M = 0, \quad \text{对于 } S = 0,$$

$M = 0, \pm 1$, 对于 $S = 1$,

χ_{00} 称为自旋单态, $\chi_{1M}(M=0, \pm 1)$ 称为自旋三重态. 用非耦合表象的基矢, 可展开如下

$$\begin{cases} \chi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B], \\ \chi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B], \\ \chi_{11} = |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B, \\ \chi_{1-1} = |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B. \end{cases} \quad (11)$$

从波函数形式, 直观上可以看出, χ_{00} 和 χ_{10} 是纠缠态, 而 χ_{11} 和 χ_{1-1} 却并非纠缠态. 因此, **角动量耦合并不等同于纠缠**, 其原因在于 $S_z = s_z^A + s_z^B$ 是两个粒子的自旋算符 s_z^A 和 s_z^B 的线性叠加. 此结论也可以从两个粒子组成的复合体系的约化密度矩阵的性质看出(见附录 A3), 以自旋单态 χ_{00} 为例, 相应的密度矩阵为

$$\rho_{AB} = |\chi_{00}\rangle\langle\chi_{00}|, \quad (12)$$

它是一个纯态相应的密度矩阵. 但对于一个子体系, 例如粒子 A, 其约化密度矩阵为(见附录 A3 中(A. 39)式)

$$\begin{aligned} \rho_A(\chi_{00}) &= \text{tr}_B(\rho_{AB}), \\ &= {}_B\langle\uparrow|\chi_{00}\rangle\langle\chi_{00}|\uparrow\rangle_B + {}_B\langle\downarrow|\chi_{00}\rangle\langle\chi_{00}|\downarrow\rangle_B \\ &= \frac{1}{2}[|\downarrow\rangle_A\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle_A\langle\uparrow|] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I_A. \end{aligned} \quad (13)$$

显然, $\rho_A^2 = \frac{1}{4}I_A \neq \rho_A$, 可见它是混合态. 类似可以求出, 对于 $|\chi_{10}\rangle$ 态

$$\rho_A(\chi_{10}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I_A, \quad (14)$$

也是混合态密度矩阵. 但对于非纠缠态 χ_{11} 和 χ_{1-1}

$$\rho_A(\chi_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_A(\chi_{1-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

则是纯态密度矩阵($\rho^2 = \rho$). 通常把 χ_{11} 和 χ_{1-1} 进行等权重(同相或反相)叠加, 以构成两粒子体系的另外两个纠缠态. 这样, 自旋为 $1/2$ 的两个粒子的 4 个自旋纠缠态可表示如下

$$\begin{cases} |\psi^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B \pm |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B], \\ |\phi^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \pm |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B], \end{cases} \quad (16)$$

通常称之为 Bell 基(Bell basis). 它们与耦合表象的基矢并不完全相同.

试问这 4 个 Bell 基是什么力学量完全集的共同本征态?

考虑让体系绕 x 轴旋转 180° , $R_x(\pi) = e^{-i\pi S_x} (\hbar=1)$. 按角动量理论, 在取适当的相位规定之后^[3]

$$R_x(\pi)\chi_{SM} = (-1)^S \chi_{S,-M}, \quad (17)$$

因此,

$$\begin{aligned} R_x(\pi)\chi_{00} &= \chi_{00}, \\ R_x(\pi)\chi_{10} &= -\chi_{10}, \\ R_x(\pi)\chi_{11} &= -\chi_{1-1}, \\ R_x(\pi)\chi_{1-1} &= -\chi_{11}, \end{aligned} \quad (18)$$

即 χ_{00} 和 χ_{10} 是 $R_x(\pi)$ 的本征态, 而 χ_{11} 与 χ_{1-1} 则不是. 但不难看出

$$\begin{aligned} R_x(\pi)[\chi_{11} + \chi_{1-1}] &= -[\chi_{11} + \chi_{1-1}], \\ R_x(\pi)[\chi_{11} - \chi_{1-1}] &= [\chi_{11} - \chi_{1-1}]. \end{aligned} \quad (19)$$

因此, Bell 基中, $|\psi^-\rangle$ 与 $|\phi^-\rangle$ 是 $R_x(\pi)$ 的本征态, 本征值 $r=1$, 而 $|\psi^+\rangle$ 与 $|\phi^+\rangle$ 也是 $R_x(\pi)$ 的本征态, 本征值 $r=-1$. 从式(16)还可以明显看出, $|\psi^\pm\rangle$ 与 $|\phi^\pm\rangle$ 都是 $|S_z|$ 的本征态. 本征值分别为 $|M|=0$ 和 1 , 所以 Bell 基是力学量完全集($|S_z|, R_x(\pi)$)或($S_z^2, R_x(\pi)$)的共同本征态. 这不足为怪, 因为尽管 $[S_z, R_x(\pi)] \neq 0$, 但 $[S_z^2, R_x(\pi)] = 0$. 通常 $R_x(\pi)$ 的本征值 r 称为旋称(signature). 为了方

便,常令 $r=e^{-i\alpha}$, α 称为旋称指数(signature exponent),也常常简称为旋称. $r=1$ 相当于 $\alpha=0$, $r=-1$ 相当于 $\alpha=1$. 这样,式(16)中的 4 个 Bell 基,可以用 $||M|, \alpha\rangle$ 或 $|M^2, \alpha\rangle$ 标记如下

$$\begin{cases} |\psi^-\rangle = |00\rangle, \\ |\psi^+\rangle = |01\rangle, \\ |\phi^-\rangle = |10\rangle, \\ |\phi^+\rangle = |11\rangle. \end{cases} \quad (20)$$

在国际文献中把 Bell 基看成力学量完全集 $(\sigma_z^{(A)} \sigma_z^{(B)}, \sigma_x^{(A)} \sigma_x^{(B)})$ 的共同本征态. 利用

$$\begin{aligned} \sigma_z |\uparrow\rangle &= |\uparrow\rangle, & \sigma_z |\downarrow\rangle &= -|\downarrow\rangle, \\ \sigma_x |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle, & \sigma_x |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

容易证明

$$\begin{cases} \sigma_z^{(A)} \sigma_z^{(B)} |\psi^\pm\rangle = -|\psi^\pm\rangle, \\ \sigma_z^{(A)} \sigma_z^{(B)} |\phi^\pm\rangle = +|\phi^\pm\rangle, \end{cases} \quad (22)$$

而

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(A)} \sigma_x^{(B)} |\psi^+\rangle &= +|\psi^+\rangle, & \sigma_x^{(A)} \sigma_x^{(B)} |\phi^+\rangle &= +|\phi^+\rangle, \\ \sigma_x^{(A)} \sigma_x^{(B)} |\psi^-\rangle &= -|\psi^-\rangle, & \sigma_x^{(A)} \sigma_x^{(B)} |\phi^-\rangle &= -|\phi^-\rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

4 个 Bell 基的不同标记的比较,列于表 1 中. 实际上,对于二粒子体系,两组力学量全集 $(|S_z|, R_x(\pi))$ 和 $(\sigma_z^{(A)} \sigma_z^{(B)}, \sigma_x^{(A)} \sigma_x^{(B)})$ 是彼此等价的. 但 $R_x(\pi)$ 的物理含义及相应的本征值比较清楚.

表 1 4 个 Bell 基的不同标记的比较

Bell 基	$\sigma_z^{(A)} \sigma_z^{(B)}$	$\sigma_x^{(A)} \sigma_x^{(B)}$	$R_x(\pi)$		
			$ S_z $	$r=e^{-i\alpha}$ (signature)	α (signature exponent)
$ \psi^-\rangle$	-	-	0	+1	0
$ \psi^+\rangle$	-	+	0	-1	1
$ \phi^-\rangle$	+	-	1	+1	0
$ \phi^+\rangle$	+	+	1	-1	1

由于 4 个 Bell 基都是纠缠态,如果让两个粒子分离,分别处于空间不同地点,并且对于其中一个粒子进行局域性测量自旋(而顾不上另一个粒子),则是一个**非完备测量**,对其测量结果的描述应该用约化密度矩阵 $\rho = \frac{1}{2}I$,这是一个混合态^[4].在此混合态下,测量粒子的自旋沿任何方向分量时, $\pm 1/2$ 值均可出现,而且概率相同(均为 $1/2$).

最后讨论一下在纠缠态下两个粒子分别沿空间任意给定的两个方向 $\mathbf{n}_1$ 和 $\mathbf{n}_2$ 的投影的关联. 即 $(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \mathbf{n}_1)$ 和 $(\boldsymbol{\sigma}^{(B)} \cdot \mathbf{n}_2)$ 的关联,亦即在纠缠态下 $(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \mathbf{n}_1)(\boldsymbol{\sigma}^{(B)} \cdot \mathbf{n}_2)$ 的平均值. 先讨论纠缠态 $|\psi^-\rangle_{AB} = |\chi_{00}\rangle$ (自旋单态). 利用

$$\begin{aligned}\sigma_x |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle, \sigma_x |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \\ \sigma_y |\uparrow\rangle &= i|\downarrow\rangle, \sigma_y |\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle,\end{aligned}$$

不难证明 $(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} + \boldsymbol{\sigma}^{(B)})|\chi_{00}\rangle = 0$, 再利用 $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_1)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_2) = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)$, 可得

$$\begin{aligned}& {}_{AB}\langle\psi^-|(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \mathbf{n}_1)(\boldsymbol{\sigma}^{(B)} \cdot \mathbf{n}_2)|\psi^-\rangle_{AB} \\&= -{}_{AB}\langle\psi^-|(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \mathbf{n}_1)(\boldsymbol{\sigma}^{(A)} \cdot \mathbf{n}_2)|\psi^-\rangle_{AB} \\&= -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 - i{}_{AB}\langle\psi^-|\boldsymbol{\sigma}^{(A)}|\psi^-\rangle_{AB} \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \\&= -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = -\cos\theta,\end{aligned}\tag{24}$$

θ 是 $\mathbf{n}_1$ 与 $\mathbf{n}_2$ 的夹角.

三、光子偏振态与双光子纠缠态^[5]

光子是电磁场量子,自旋为 1,静质量为 0,因而无静止参照系.光子的极化方向总是和运动方向垂直.这表现为经典电磁波为横波,即电磁场与波传播方向垂直(以下取传播方向为 z 轴,即波矢沿 z 轴方向).习惯上取电场方向为偏振方向.任何偏振态均可分解成两个互相垂直的线偏振态,例如水平方向(x)和垂直方向(y)偏振态,记为 $|x\rangle$ 和 $|y\rangle$ (图 1).当坐标系绕 z 轴旋转 $|\theta\rangle$ 角后,

$$\begin{aligned} |x\rangle &\rightarrow |x(\theta)\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle, \\ |y\rangle &\rightarrow |y(\theta)\rangle = -\sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle, \end{aligned} \quad (25)$$

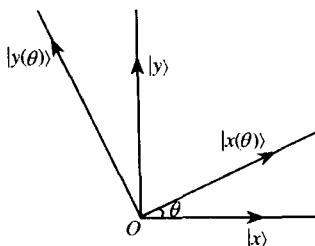


图 1

或者表示成

$$\begin{pmatrix} |x(\theta)\rangle \\ |y(\theta)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |x\rangle \\ |y\rangle \end{pmatrix} = R_z(\theta) \begin{pmatrix} |x\rangle \\ |y\rangle \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$R_z(\theta)$ 是实正交矩阵,描述坐标系绕 z 轴旋转 θ 角.由于绕定轴的旋转群为Abel群, $R_z(\theta)$ 是可约化的.不难证明, $R_z(\theta)$ 的本征态可以表示成

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

分别称为右旋和左旋偏振态,相应的 $R_z(\theta)$ 的本征值为 $e^{\pm i\theta}$.不难看出, $R_z(\theta) = \exp(i\theta s_z)$ 的生成元(无穷小算符)为

$$s_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y, \quad (29)$$

而 $|R\rangle$ 和 $|L\rangle$ 是 s_z 的本征态. s_z 的本征值分别为 ± 1 ,即 $s_z|R\rangle = |R\rangle, s_z|L\rangle = -|L\rangle$.这反映光子的自旋 $s=1$ (而不是 $1/2$).

在量子力学中, $|R\rangle$ 和 $|L\rangle$ 习惯上分别记为 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$,即

$$\begin{cases} |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle), \\ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle). \end{cases} \quad (30)$$

不难看出, $s_z|\pm 1\rangle = \pm|\pm\rangle$, 即 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 是 s_z 本征态, 本征值为 ± 1 , 分别称为右旋光子态和左旋光子态.

现在来考虑双光子(A 和 B)体系. 设一个光子沿 $+z$ 轴方向传播, 另一个往 $-z$ 轴方向传播, 则下列双光子偏振态

$$|+\rangle_A |-\rangle_B, \quad |-\rangle_A |+\rangle_B \quad (31)$$

是双光子体系总自旋投影 $S_z = s_z^{(A)} + s_z^{(B)}$ 的本征态, s_z 本征值为 0. 它们对于绕 z 轴的旋转是不变的. 光子自旋沿传播方向的投影, 称为螺旋度(helicity)(注意, 由于两个光子传播方向相反, 所以两个光子的螺旋度是相同的). 但注意式(31)所示两个偏振态分别都不是纠缠态.

考虑绕 x 轴旋转 180° 的变换. 显然, 在 $R_x(\pi)$ 作用下

$$|x\rangle \rightarrow +|x\rangle, \quad |y\rangle \rightarrow -|y\rangle, \quad (32)$$

因而

$$|+\rangle \rightarrow |-\rangle, \quad |-\rangle \rightarrow |+\rangle. \quad (33)$$

容易看出,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle_A |-\rangle_B \pm |-\rangle_A |+\rangle_B] \quad (34)$$

是 $R_x(\pi)$ 的本征态, 本征值分别为 ± 1 , 记为旋称 $r = \pm 1$, 或令 $r = e^{i\pi\alpha}$, $r = +1$ 相当于 $\alpha = 0$, $r = -1$ 相当于 $\alpha = 1$. 这样, 式(34)所示的双光子的偏振态都是 s_z 和 $R_x(\pi)$ 的共同本征态, 用量子数 $M = 0$ 和 $\alpha = 0, 1$ 来标记. 它们是双光子纠缠态. 由于 $M = 0$, 它们对于绕 z 轴的旋转是不变的. 在有些文献中, 习惯记为

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle_A |-\rangle_B \pm |-\rangle_A |+\rangle_B],$$

即

$$\begin{cases} |\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|x\rangle_A|x\rangle_B + |y\rangle_A|y\rangle_B], \\ |\psi^-\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}[|x\rangle_A|y\rangle_B - |y\rangle_A|x\rangle_B] \end{cases} \quad (35)$$

如按 $|M\alpha\rangle$ 来标记, 则

$$|\psi^+\rangle_{AB} = |00\rangle, \quad |\psi^-\rangle_{AB} = |01\rangle, \quad (36)$$

设绕 z 轴旋转 θ 角后的 x 轴和 y 轴方向的线偏振态分别记为 $|x(\theta)\rangle$ 和 $|y(\theta)\rangle$ [见式(26)]. 定义算符^[5] (相当于电子的 $\sigma \cdot n$, n 代表 (θ, ϕ) 方向单位矢),

$$\tau(\theta) = |x(\theta)\rangle\langle x(\theta)| - |y(\theta)\rangle\langle y(\theta)|, \quad (37)$$

显然

$$\tau(\theta)|x(\theta)\rangle = +|x(\theta)\rangle, \quad \tau(\theta)|y(\theta)\rangle = -|y(\theta)\rangle, \quad (38)$$

即 $|x(\theta)\rangle$ 和 $|y(\theta)\rangle$ 都是 $\tau(\theta)$ 的本征态, 本征值为 ± 1 . 现在来计算双光子纠缠态 $|\psi^+\rangle_{AB}$ 下, $\tau^{(A)}(\theta_1)\tau^{(B)}(\theta_2)$ 的平均值. 考虑到 $|\psi^+\rangle_{AB}$ 态对 z 轴旋转的不变性,

$$\begin{aligned} {}_{AB}\langle\psi^+|\tau^{(A)}(\theta_1)\tau^{(B)}(\theta_2)|\psi^+\rangle_{AB} \\ = {}_{AB}\langle\psi^+|\tau^{(A)}(0)\tau^{(B)}(\theta_2 - \theta_1)|\psi^+\rangle_{AB} \\ = \frac{1}{2}[_B\langle x|\tau^{(B)}(\theta_2 - \theta_1)|x\rangle_B + {}_B\langle y|\tau^{(B)}(\theta_2 - \theta_1)|y\rangle_B], \end{aligned}$$

经过计算^①上式

$$= \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - \sin^2(\theta_2 - \theta_1) = \cos 2(\theta_2 - \theta_1). \quad (39)$$

四、EPR 佯谬

A. Einstein, B. Podolsky 和 N. Rosen 在 1935 年发表了一

① 令 $\theta = (\theta_2 - \theta_1)$,

$$\begin{aligned} {}_B\langle x|\tau^{(B)}(\theta)|x\rangle_B &= {}_B\langle x|x(\theta)\rangle_B {}_B\langle x|x(\theta)\rangle_B - {}_B\langle x|y(\theta)\rangle_B {}_B\langle y(\theta)|x\rangle_B \\ &= (1\ 0) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} (\cos\theta \ \sin\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (1\ 0) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} (-\sin\theta \ \cos\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta). \end{aligned}$$

类似有,

$${}_B\langle y|\tau^{(B)}(\theta)|y\rangle_B = (\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$