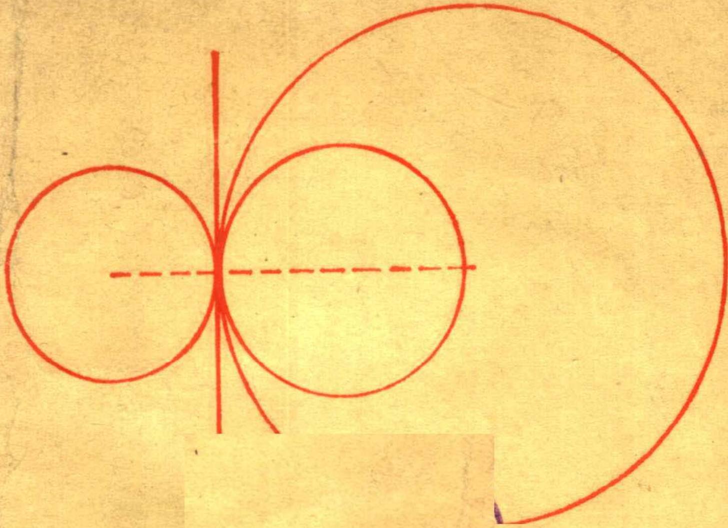

工农业余中等学校初中课本

数学

第三册

人民教育出版社

工农业余中等学校初中课本
（试用本）
数学
第三册
工农教育教材编写组编
*
人民教育出版社出版
湖北人民出版社重印
湖北省新华书店发行
孝感地区印刷厂印刷
•
开本787×1092 1/32 印张11 字数135,000
1980年2月第1版 1982年3月湖北第4次印刷
印数72,001—234,000
书号 K7012•0245 定价0.69元

说　明

教育部工农教育局组织十六个省市的一些教师和有关人员，根据全日制中小学教材的基本要求，结合工农学员的特点，编写了工农业余中等学校语文、数学、物理、化学课本和业余初等学校语文、算术课本，供各地试用。

工农业余中等学校初中数学课本共三册：为了适合工农学习，恒等变形、平面几何教学内容的编排都比较集中，直线与圆的方程一章移到高中，指数与对数一章中引入了自然对数概念及对数换底公式。视图、简易测量、统计初步作为选用教材；例题、习题、复习题也可以选用，并附有习题参考答案。教学总时数约需 360 课时：第一册约需 140 课时，第二册约需 110 课时，第三册约需 110 课时。

由于学员的学习要求和知识基础不同，教学时可以根据实际情况，抽换或者适当补充一些教材的内容，但必须使学员正确地理解和掌握各册、各章教材的基本内容。

由于编写人员的水平和经验有限，编写时间比较匆促，这套课本在内容的取舍和体系的安排等方面是否合适，例题、习题的内容和分量是否恰当，希望各地在试用过程中多多提出批评和建议，以便再版时进行修改。

编　者

一九七九年十二月

目　录

第十三章　简单的二元二次方程组

13.1　二元二次方程和二元二次方程组

我们先看方程

$$x^2-2xy+y^2+x-y-4=0. \tag{1}$$

这个方程含有两个未知数，并且含有未知数的项的最高次数是2，这样的方程叫做**二元二次方程**．它的一般形式是

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

这里 A、B、C 至少要有一个不是零，Ax^2、Bxy、Cy^2 叫做二次项，Dx、Ey 叫做一次项，F 叫做常数项．

在一个二元二次方程里，如果把其中一个未知数任意取一个值，代入这个方程就可以得出含另一个未知数的一元方程，只要这个一元方程有一个根或者两个根，我们就可以得出这个二元二次方程的一组解或者两组解，因此，一个二元二次方程一般可以有无数组解．

我们再看下面(Ⅰ)、(Ⅱ)两个方程组：

(Ⅰ) $\begin{cases}x-y=5,\\x^2+y^2=625;\end{cases}$　　(Ⅱ) $\begin{cases}x^2+xy+y^2-7=0,\\6x^2-5xy+y^2=0.\end{cases}$

方程组(I)是由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的，方程组(II)是由两个二元二次方程组成的. 象这样的方程组都叫做**二元二次方程组**.

我们已经学习过二元一次方程组的解法和一元二次方程的解法，综合这些知识，就可以解某些简单的二元二次方程组. 下面我们就来研究一些简单的二元二次方程组的解法.

13.2 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的二元二次方程组 这种形式的方程组都可以用代入法消去一个未知数，得出只含有另一个未知数的一元方程来解.

例 1 解方程组 $\begin{cases} 5x^2-y^2=11, & (1) \\ 2x-y=1. & (2) \end{cases}$

解: 由(2)，得 $y=2x-1$, (3)

将(3)代入(1)，得 $5x^2-(2x-1)^2=11$,

即 $x^2+4x-12=0$,

解这个方程，得 $x_1=2$, $x_2=-6$,

把 x_1、x_2 分别代入(3)，得 $y_1=3$, $y_2=-13$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-6, \\ y_2=-13. \end{cases}$

注意: 把二元一次方程变形后代入二元二次方程，求得一个未知数的值后，求另一个未知数的值时，必须代入原来的一次方程或变形后的一次方程.

例 2 解方程组 $\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+3}=\dfrac{3}{4}, & (1)\\ \dfrac{3}{x+2}=\dfrac{1}{y}. & (2)\end{cases}$

解: 把(1) 的两边都乘以 $4(x+1)(y+3)$, 整理后, 得

$$3xy+5x-y-7=0, \tag{3}$$

把(2)的两边都乘以$(x+2)y$, 整理后, 得

$$x-3y+2=0, \tag{4}$$

解方程组$\begin{cases}3xy+5x-y-7=0,\\ x-3y+2=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-7\dfrac{2}{3},\\ y_2=-1\dfrac{8}{9}.\end{cases}$

把两组解代入 $4(x+1)(y+3)$和 $(x+2)y$, 得到的值都不是零, 所以它们都是原方程组的解.

注意: 解例 2 这种方程组时, 在变形的过程中, 有可能引进增根, 因此, 最后求得的解, 必须进行检验.

例 3* 解方程组 $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=13, & (1)\\ \sqrt{xy}=40. & (2)\end{cases}$

解: 设$\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$, 那么原方程组就变形成:

$$\begin{cases} u+v=13, \\ u \cdot v=40. \end{cases}$$

解这个方程组,得

$$\begin{cases} u_1=5, \\ v_1=8; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2=8, \\ v_2=5. \end{cases}$$

就是
$$\begin{cases} \sqrt{x}=5, \\ \sqrt{y}=8; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x}=8, \\ \sqrt{y}=5. \end{cases}$$

学员自己来完成这组解.

练 习

1. (口答)下列各方程是几元几次方程?

(1) $3x+5y=4$; (2) $xy=1$; (3) $2x^2-y=7x+5$;

(4) $9x^2=2y$; (5) $5-8x^2=3x$;

(6) $3x^2-xy=4y^2-2y+1$.

2. 在例1中,求得 $x_1=2$; $x_2=-6$ 后,如果把 $x_1=2$ 代入(1)得

$$y^2=5\times 2^2-11=20-11=9,$$

$$\therefore \quad y=\pm 3.$$

把 $x_2=-6$ 代入(1),得

$$y^2=5\times(-6)^2=180-11=169,$$

$$\therefore \quad y=\pm 13.$$

这样方程组的解是:

$$\begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-6, \\ y=13; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-6, \\ y=-13. \end{cases}$$

这样的解法对吗?

3. 解下列各方程组：

(1) $\begin{cases}x=7-y,\\ xy=10;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+y=2,\\ x^2+y^2=10;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+xy-2=0,\\ y-3x=7;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x^2+x=4y^2,\\ 3x+6y=1.\end{cases}$

习　题　13.1

1. 已知方程组 $\begin{cases}x=7-y, & (1)\\ x^2+y^2=25. & (2)\end{cases}$

在下列各组 x 和 y 的值里，哪些是方程(1)的解？哪些是方程(2)的解？哪些是方程组的解？

$\begin{cases}x=2,\\ y=5;\end{cases}$　$\begin{cases}x=3,\\ y=4;\end{cases}$　$\begin{cases}x=-4,\\ y=-3;\end{cases}$　$\begin{cases}x=4,\\ y=3;\end{cases}$　$\begin{cases}x=-3,\\ y=-4;\end{cases}$

$\begin{cases}x=5,\\ y=2.\end{cases}$

2. 解下列各方程组：

(1) $\begin{cases}x^2+xy+y^2+x+5y=0,\\ x+2y=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}y=2-3x,\\ x^2+2xy+3y^2-3x+1=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}(x-1)(y-1)=2,\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=1;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{x+y}{5},\\ 2(y+3)=(3x-y)(3y-x).\end{cases}$

3. 解下列各方程组:

(1) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=1,\\ 2x+3y=-10;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{2x-5}{x-2}+\dfrac{2y-3}{y-1}=2,\\ 3x-4y=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=1,\\ \dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2}{y};\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dfrac{3}{x+5}+\dfrac{2}{y-3}=2,\\ \dfrac{4}{x-2}=\dfrac{1}{y-6}.\end{cases}$

4.* 解下列各方程组:

(1) $\begin{cases}\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{25}{y^2}=200,\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=20.\end{cases}$

5. k 等于什么数值时，下列方程组在实数集有相同的两组解?

(1) $\begin{cases}y=kx+2,\\ y^2-4x-2y=1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\ x-y=k.\end{cases}$

13.3 由两个二元二次方程组成的方程组 这种形式的方程组，消去一个未知数以后，一般要得出一个一元四次方程.

例如，方程组 $\begin{cases}y=x^2+1,\\ x=y^2-2,\end{cases}$

消去 y，得 $x^4+2x^2-x-1=0.$

这是一个四次方程，这个四次方程我们现在还不会解，但是这种形式的二元二次方程组中，有一些特殊

的，可以化成我们会解的方程，举例如下：

例 1 解方程组 $\begin{cases} x^2-2y^2-y-1=0, & (1) \\ 2x^2-4y^2+x-6=0. & (2) \end{cases}$

这里，这两个方程里的二次项，对应项的系数成比例，就是$\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}$. 因此，利用加减消元法可以消去二次项，得到一个二元一次方程. 这样就可以利用13.2里所讲的方法来解.

解：(2) − (1) × 2，得

$$x+2y-4=0,$$

$$\therefore \quad x=4-2y, \qquad (3)$$

把(3)代入(1)，整理后，得 $2y^2-17y+15=0$,

$$\therefore \quad y_1=1, \quad y_2=\frac{15}{2}.$$

把 $y_1=1$, $y_2=\frac{15}{2}$分别代入(3)，得

$$x_1=2, \qquad x_2=-11.$$

因此，原方程组的解是：$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-11, \\ y_2=7\frac{1}{2}. \end{cases}$

例 2 解方程组 $\begin{cases} x^2+2y^2-x+y=12, & (1) \\ x^2+y^2-x=6. & (2) \end{cases}$

这个方程组里的两个方程里含有未知数 x 的对应

项的系数成比例，就是$\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}$. 因此，如果利用加减消元法消去含有 x 的项，就可以得到一个只含有 y 的二次方程，如果这个方程的 $\Delta\geqslant 0$，就可以求得原方程组的解.

解：(1)－(2)，得

$$y^2+y-6=0,$$

分解因式，得 $(y-2)(y+3)=0$.

因此，原方程组可以化成

(Ⅰ) $\begin{cases}y-2=0,\\x^2+y^2-x=6;\end{cases}$ (Ⅱ) $\begin{cases}y+3=0,\\x^2+y^2-x=6.\end{cases}$

解(Ⅰ)，得 $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=2.\end{cases}$

解(Ⅱ)，把 $y=-3$ 代入方程(2)，整理后，得

$$x^2-x+3=0,$$

很明显 $\Delta=1-12<0$，这个方程在实数集无解.

所以方程组(Ⅱ)无解.

因此，原方程组的解是

$$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=2.\end{cases}$$

练 习

解下列方程组：

1. (1) $\begin{cases}xy+x=20,\\xy+y=18;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}3x^2+5x-8y=36,\\2x^2-3x-4y=3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2y^2+x-y=3,\\3y^2-2x+y=0.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=6,\\x^2-y^2-x-y=2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=18,\\x^2-y^2+x-y=6;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+xy-y^2=5,\\x^2-xy+y^2=7.\end{cases}$

例 3 解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=5, & (1)\\2x^2-3xy-2y^2=0. & (2)\end{cases}$

这里，第二个方程的左边可以分解成两个一次因式，而右边是零．因此，它可以变形成两个一次方程，从而原方程组可以化成由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的两个方程组．

解： 由(2)，得

$$(2x+y)(x-2y)=0,$$

$\therefore\quad 2x+y=0$ 或 $x-2y=0.$

因此，原方程组就可以化成

$$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\2x+y=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2+y^2=5,\\x-2y=0.\end{cases}$$

解这两个方程组，得原方程组的解是

$$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=2,\\y_3=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=-2,\\y_4=-1.\end{cases}$$

例 4 解方程组 $\begin{cases}x^2-2xy-y^2=2, & (1)\\xy+y^2=4. & (2)\end{cases}$

这里，两个二次方程都没有未知数的一次项，因此，消去常数项后就可以得出形如 $ax^2+bxy+cy^2=0$ 的方程．如果这个方程左边的二次齐次三项式能够分解为两个一次齐次式的因式，那么与原方程组的任何一个方程组成象例 3 那样的方程组，就可求解．

解：(1)×2－(2)，得

$$2x^2-5xy-3y^2=0,$$

$$(2x+y)(x-3y)=0.$$

$$\therefore \quad 2x+y=0 \quad 或 \quad x-3y=0.$$

因此，原方程组可以变形成

$$\begin{cases}2x+y=0,\\ xy+y^2=4;\end{cases} \qquad \begin{cases}x-3y=0,\\ xy+y^2=4.\end{cases}$$

学员自己来解这两个方程组．

从上面这些例子可以看到，解两个都是二元二次方程组成的方程组，只要根据各个方程组的特点，通过消元或者降次，导出一个我们会解的一元方程或者一次方程，这样就可以利用我们学过的方法来解．

练　习

解下列方程组：

1. (1) $\begin{cases}(y-x)(y+x)=0,\\ x^2=25;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ 2x^2-3xy-2y^2=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ (x+y)^2=49.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}3x^2-y^2=8,\\x^2+xy+y^2=4;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\xy=2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}xy+y^2=12,\\x^2+xy=24.\end{cases}$

习 题 13.2

解下列各方程组(1—6):

1. (1) $\begin{cases}2x^2-5xy+3x-2y=10,\\5xy-2x^2+7x-8y=10;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x^2+4xy-2x-y+2=0,\\3x^2+6xy-x+3y=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2-2xy-y^2+2x+y+2=0,\\2x^2-4xy-2y^2+3x+3y+4=0;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}2x^2+2xy+4y^2-x-96=0,\\x^2+xy+2y^2+y-43=0.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\y^2=4x;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2=5-y^2,\\x^2-y^2=3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=2,\\x^2+5=y^2;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x^2-3xy+y^2+2x-3y+2=0,\\x^2+3xy-y^2+2x+3y-2=0;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x^2-15xy-3y^2+2x+9y-98=0,\\5xy+y^2-3y+21=0.\end{cases}$

3. (1) $\begin{cases}6x^2-5xy+y^2=0,\\x^2+xy+y^2=7;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2-5xy+6y^2=0,\\x^2+y^2+x-11y-2=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\(x-y)^2-2(x-y)-3=0;\end{cases}$

(4) $\begin{cases} y^2-x^2=5, \\ 4x^2+4xy+y^2+4x+2y-3=0. \end{cases}$

4. (1) $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2-13xy=14; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+xy+y^2-19=0, \\ xy-6=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ 4x^2-5xy+6y^2=30; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=38, \\ x^2-xy+y^2-14=0. \end{cases}$

5.* (1) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9, & (1) \\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0. & (2) \end{cases}$

解法举例：

这个方程组的特点是：第一个方程的左边是完全平方，右边是常数，可以分解成两个一次方程；而第二个方程也可以分解成两个一次方程. 因此，原方程组可以分解成四个二元一次方程组.

解：从(1)，得 $(x+y)^2=9$,

$\therefore$ $x+y=\pm3.$

从(2)，得 $(x-y-2)(x-y-1)=0$,

$\therefore$ $x-y-2=0, x-y-1=0.$

因此，原方程组可以分解成下列四个方程组：

$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y-2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y-1=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y-2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y-1=0. \end{cases}$

解这四个方程组，得

$\begin{cases} x_1=\dfrac{5}{2}, \\ y_1=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=-\dfrac{1}{2}, \\ y_3=-\dfrac{5}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-1, \\ y_4=-2. \end{cases}$

(2) $\begin{cases}(x+y)^2-4=0,\\(x-y)^2=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2-y^2+x+5y-6=0,\\6x^2-xy-y^2-5x+5y-4=0.\end{cases}$

6. (1) $\begin{cases}x+y=5,\\xy=-6;\end{cases}$

解法举例:

根据韦达定理,原方程的 x、y 是方程

$$z^2-5z-6=0$$

的两个根.

解这个方程,得

$$z_1=6,\qquad z_2=-1.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x_1=6,\\y_1=-1;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=6.\end{cases}$$

(2) $\begin{cases}x+y=7,\\xy=12;\end{cases}$　　　(3) $\begin{cases}x+y=3,\\xy=-10.\end{cases}$

小　结

一、本章主要是简单的二元二次方程组及其解法.

二、解二元二次方程组的基本方法有:

1. 由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组的解法,一般可以用代入法来解.