初中数学竞赛常用解题方法

袁禹门 编著

重 庆 出 版 社

1992年·重庆

（川）新登字010号

责任编辑　黄友六
封面设计　王小珊
技术设计　刘黎东

袁禹门编著
初中数学竞赛常用解题方法

重庆出版社出版、发行（重庆长江二路205号）
新　华　书　店　经　销　重庆印制一厂印刷
*
开本787×1092 1/32 印张 9.75 插页 4 字数 209千
1992年5月第一版　　1992年5月第一版第一次印刷
印数：1—15，000
*
ISBN 7-5366-1810-7/G·586

定价：2.75元

目　　录

一、代　数

1. 配方法

配方法是数学中的一种重要方法。所谓配方，就是把一个多项式配成正整数次幂的形式。配方常用到的公式有：

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2;$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2;$$

$$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3;$$

……

用得最多的是第一组公式，主要是配平方。

例1　化简$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$。(1983年云南省十七地州市数学联赛试题)

分析　本例要抓住两点：(1) $x-1$与$x-2$间的关系，$x-1$可写成$x-2+1$；(2) $x-2$是$\sqrt{x-2}$的平方。这样就可利用两数和或差的平方公式进行配方。另外，还要注意形如$\sqrt{(a-b)^2}$的去根号，不能简单地得$\sqrt{(a-b)^2}=a-b$，

而是$\sqrt{(a-b)^2}=\begin{cases}a-b,\text{当 } a\geqslant b\text{时；}\\ b-a,\text{当 } a<b\text{时。}\end{cases}$因此，原式

$$=\sqrt{(x-2)+2\sqrt{x-2}+1}+\sqrt{(x-2)-2\sqrt{x-2}+1}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2}$$

$$=\sqrt{x-2}+1+|\sqrt{x-2}-1|$$

$$=\begin{cases} 2\sqrt{x-2}, & \text{当} x\geqslant 3 \text{时}, \\ 2, & \text{当} 2\leqslant x<3 \text{时}. \end{cases}$$

例2 已知 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{3A+5B}+\sqrt{3A-5B})$,

$y=\frac{1}{2}(\sqrt{3A+5B}-\sqrt{3A-5B})$，求$x^2+xy+y^2$的值。

分析 所求式配方后含有x、y的和与积，为了使计算比较简洁，可先算出$x+y$与xy.

$$x+y=\frac{1}{2}(\sqrt{3A+5B}+\sqrt{3A-5B})$$

$$+\frac{1}{2}(\sqrt{3A+5B}-\sqrt{3A-5B})$$

$$=\sqrt{3A+5B},$$

$$xy=\frac{1}{2}(\sqrt{3A+5B}+\sqrt{3A-5B})$$

$$\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3A+5B}-\sqrt{3A-5B})$$

$$=\frac{1}{4}(3A+5B-3A+5B)$$

$$=\frac{5}{2}B.$$

故$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$

$$=(\sqrt{3A+5B})^2-\frac{5}{2}B$$

$$=3A+\frac{5}{2}B.$$

例3 若$(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$，试求$x+z$与y的

关系．(1986年宿州市初中数学竞赛试题)

分析　本例要求$x+z$与y的关系，从已知条件来看，含有x、z、y，但没有含$x+z$，因此要从已知条件着手，通过配方，重新组合．为此，我们从已知条件得

$$x^2-2xz+z^2-4xy+4y^2+4xz-4yz=0.$$

重新组合出$x+z$，由配方得

$$(x+z)^2-4(x+z)y+4y^2=0.$$

把$x+z$和$2y$当作两项，又符合两数差的平方公式，配方得

$$[(x+z)-2y]^2=0.$$

所以$x+z$与y间的关系为　$x+z=2y$.

例4　设$M=4x^2-12xy+10y^2+4y+11$，试求式子的x，y各为何值时M的值最小，并求出这个最小值．(1986年成都市金牛区初二数学竞赛试题)

分析　求二次函数的极值和最值都常常用到配方法．本例通过配方，得

$$\begin{aligned}M&=(4x^2-12xy+9y^2)+(y^2+4y+4)+7\\&=(2x-3y)^2+(y+2)^2+7.\end{aligned}$$

当 $\begin{cases}2x-3y=0,\\y+2=0\end{cases}$ 时，M有最小值7.

解此方程组，得 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2.\end{cases}$

故当$x=-3$，$y=-2$时，M有最小值，最小值为7.

例5　设x、y、z为互不相等的三数，求证

$$\left(\frac{1}{y-z}\right)^2+\left(\frac{1}{z-x}\right)^2+\left(\frac{1}{x-y}\right)^2=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}\right.$$

$$+\frac{1}{x-y}\Big)^2.$$

分析　本例可用逐步配方的方法完成证明。

$$\text{左边}=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}\right)^2-2\cdot\frac{1}{y-z}\cdot\frac{1}{z-x}+\left(\frac{1}{x-y}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}\right)^2+2\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}\right)\cdot\frac{1}{x-y}$$

$$+\left(\frac{1}{x-y}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2=\text{右边},$$

所以原式成立。

练习1

1．计算 $\lg\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

2．化简 $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

3．解方程 $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2}$.

4．求证 $x^4+3x^2+2x+6=0$ 无实数根。

2．非负数法

在实数范围内，非负数指的是零和正数。绝对值、算术根和一个实数的偶次幂都是非负数。非负数具有下面一些性质：

（1）有限个非负数的和仍然是非负数；

（2） 两个非负数的差不一定是非负数，当被减数小于减数时，其差为负数；

（3） 有限个非负数的积(包括乘方)仍然是非负数；

（4） 非负数的商仍然是非负数(除数不为零)；

（5） 非负数大于一切负数；

（6） 最小的非负数为零，无最大的非负数；

（7） 若有限个非负数的和为零，则每个加数必为零。

它的基本形式为

若$A^2+B^2=0$，则$A=0$，$B=0$；

若$|A|+|B|=0$，则$A=0$，$B=0$；

若$\sqrt{A}+\sqrt{B}=0$，则$A=0$，$B=0$。

还有由这些基本形式互相搭配的形式。例如，若$A^2+|B|+\sqrt{C}=0$，则$A=0$，$B=0$，$C=0$。

在数学竞赛中，非负数的概念和性质（7）应用最普遍。这种利用非负数的概念和性质解题的方法称为非负数法。

例1 当a、b为何值时，方程$x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$有实根？(1987年全国初中数学联赛试题)

分析 要使方程有实根，它的判别式必须大于或等于零。本例的判别式中显然含有a、b，在一个式子中求两个未知数，常常考虑非负数性质的应用。

由判别式，有

$$\begin{aligned}\Delta&=4[(1+a)^2-(3a^2+4ab+4b^2+2)]\\&=-4[(1-2a+a^2)+(a^2+4ab+4b^2)]\\&=-4[(1-a)^2+(a+2b)^2]\geqslant 0.\end{aligned}$$

而 $-4[(1-a)^2+(a+2b)^2]\leqslant 0$，

$\therefore$ $-4[(1-a)^2+(a+2b)^2]=0$。

即　$(1-a)^2+(a+2b)^2=0$.

根据非负数的性质(7)，有

$$\begin{cases} 1-a=0, \\ a+2b=0. \end{cases}$$

$\therefore$　$a=1$，$b=-\frac{1}{2}$.

因此，当 $a=1$，$b=-\frac{1}{2}$时，方程有实数根。

说明：当 a 为实数时，若$-a^2\geqslant 0$，则只有$a=0$成立。

例2　已知 $\lg(x^2+4)+\lg(y^2+1)-\lg 8=\lg x+\lg y$，求$x$与$y$.（1982年湖北省初中数学竞赛试题）

分析　本例要求x和y，可从条件着手。

由条件，得$\lg(x^2+4)+\lg(y^2+1)=\lg 8+\lg x+\lg y$，

即　$$\lg(x^2+4)(y^2+1)=\lg 8xy.$$

$\therefore$　$(x^2+4)(y^2+1)=8xy$.

展开后，重新组合，得

$$(x^2y^2-4xy+4)+(x^2-4xy+4y^2)=0,$$

即　$(xy-2)^2+(x-2y)^2=0$.

根据非负数的性质，有

$$\begin{cases} xy-2=0, \\ x-2y=0. \end{cases}$$

解之得　$x_1=2$，$y_1=1$；$x_2=-2$，$y=-1$(不合题意，舍去)。

故所求的$x=2$，$y=1$.

例3　已知 $\lg x^{\frac{5}{2}}$的首数是不等式$a^2-8a+15<0$的解，

尾数是方程$\frac{7}{8}\left|y+\frac{1}{2}\right|+\frac{16}{123}\sqrt{z-1}=0$的解的两数之和，求$x$的值。

分析　本例方程中是非负数之和，利用非负数的性质，可求得尾数，为此我们设

$$\lg x^{\frac{3}{2}}=p+q(\text{其中}p\text{是首数，}q\text{是尾数})，\quad(*)$$

由不等式，得　$3<a<5$。因为一个数的对数的首数必为整数，所以$p=a=4$。

由方程，得 $y=-\frac{1}{2}$，$z=1$。

根据题意，有 $q=y+z=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$。

把p、q之值代入$(*)$式，得

$$\lg x^{\frac{3}{2}}=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

$\therefore\quad \lg x=\frac{9}{2}\div\frac{3}{2}=3$。

故　$x=1000$。

例4　已知a、b、c、d为正实数，且$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，求a、b、c、d之间的关系。

分析　本例条件式中含有四个未知数a、b、c、d，要求四个字母之间的关系，显然必须配方，看能否变成非负数和的形式。

$\because\quad a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，

$\therefore\quad 2a^4+2b^4+2c^4+2d^4=8abcd$，

$(a^2-b^2)^2+2a^2b^2+(b^2-c^2)^2+2b^2c^2+(c^2-d^2)^2$

$$+2c^2d^2+(d^2-a^2)^2+2d^2a^2-8abcd=0,$$

即 $$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-d^2)^2+(d^2-a^2)^2$$
$$+2(ab-cd)^2+2(bc-da)^2=0.$$

由非负数的性质，有

$$\begin{cases} a^2-b^2=0, \\ b^2-c^2=0, \\ c^2-d^2=0, \\ d^2-a^2=0, \\ ab-cd=0, \\ bc-da=0. \end{cases}$$

a、b、c、d为正实数，

所以 $a=b=c=d$.

例5 设 x 是从1到10的自然数，x除以3的余数为$f(x)$，y 是一位数自然数，x 除以 4 的余数为 $g(y)$，当 $2f(x)+3g(y)=0$时，求$2x+3y$ 的最大值.

分析 要求$2x+3y$ 的最大值，显然必须先求出 x、y 的最大值.

依题意，可得

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=3,\ 6,\ 9; \\ 1, & x=1,4,7,10; \\ 2, & x=2,5,8. \end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases} 0, & x=4,\ 8; \\ 1, & x=1,\ 5,\ 9; \\ 2, & x=2,\ 6; \\ 3, & x=3,\ 7. \end{cases}$$

由上可知$f(x)$，$g(y)$都是非负数。

由非负数的性质(7)可知，要使$2f(x)+3g(y)=0$，必须有$f(x)=0$，$g(y)=0$。

这时$x=3$，6，9；$y=4$，8。

x的最大值是9，y的最大值是8。

故$2x+3y$的最大值是$2\times9+3\times8=42$。

例6　p，q，a_1，a_2，b_1，b_2都是不为零的实数，且

$$\begin{cases} a_1^2+a_2^2=p^2, & (1) \\ a_1b_1+a_2b_2=pq, & (2) \\ b_1^2+b_2^2=q^2. & (3) \end{cases}$$

求证：　$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{p}{q}$。

分析　条件中的三式似满足完全平方公式形式，考虑结论需$a_1q-b_1p=0$，$a_2q-b_2p=0$，

由$(1)\times q^2+(3)\times p^2+(2)\times(-2pq)$，得

$$(a_1q-b_1p)^2+(a_2q-b_2p)^2=0.$$

而p，q，a_1，a_2，b_1，b_2均为非零的实数，利用非负数的性质，有

$$a_1q-b_1p=a_2q-b_2p=0,$$

即　$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{p}{q}$。

练习2

1．在实数范围内解方程$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$。(1978年罗马尼亚数学竞赛决赛试题)

2. 如果 a, b 为实数，且 $\sqrt{3a-1}+|b+1|=0$，求 $a^{-2}+b^{-1989}$ 之值。

3. k为何值时，不等式$2kx+1-2k^2-x^2>0$无解？

4. 当 a、b、c 为实数时，求证方程 $x^2-(a+b)x+(ab-c^2)=0$有两个实根，并求出两根相等的条件。

5. 已知 a、b、c、d 是非零实数，且 $(a^2+b^2)d^2-2b(a+c)d+b^2+c^2=0$，求证$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=d$。

3. 合成法

等式具有两条基本性质：

（1） 等式两边都加上(或减去)同一个数或式，所得的结果仍是等式；

（2） 等式两边都乘以（或除以）同一个不为零的数或式，所得的结果仍是等式。

根据这两条性质，在解题中我们常常把两个等式通过加、减、乘、除得到一个新的等式。这个新的等式往往就是我们所要求的结论，或者包含了我们所要求的结论。同时，相加和相乘还可以推广到两个以上等式的情况。

在解题过程中，把两个甚至几个等式相加、相乘，或者把两个等式相减、相除（除式不为零）而得到一个新的等式，从而使问题获得解决，这种方法称为合成法。解方程组中的加减消元就属于这种类型。

合成法是解题中常用的一种方法，在数学竞赛中也常常用到，下面举几个例子。

例1 已知$\lg 245=m$，$\lg 1372=n$，试求$\lg 7=$？(1984

年武汉市初三数学竞赛试题)

分析 从表面上看，结论lg7和两个已知条件毫无联系。但仔细观察就会发现条件中的真数245和1372都含有因数7，因而可以把两个真数进行分解，再应用对数的运算性质，构造出lg7。

$$\lg 245=\lg(49\times 5)=2\lg 7+\lg 5,$$

$$\lg 1372=\lg(343\times 4)=\lg(7^3\times 2^2)=3\lg 7+2\lg 2.$$

由已知条件，可以得到

$$\begin{cases} 2\lg 7+\lg 5=m, & (1) \\ 3\lg 7+2\lg 2=n. & (2) \end{cases}$$

根据合成法的思路，由(1)×2+(2)，得

$$7\lg 7+2(\lg 5+\lg 2)=2m+n,$$

$$\therefore\quad \lg 7=\frac{2m+n-2}{7}.$$

这种解法和解方程组类似，不过是把常数 lg7当作未知数。

例2 若x，y，z是实数，$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$，求$\dfrac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$的值。(1984年重庆市第二届初中数学竞赛试题)

分析 本例的条件和结论都比较复杂。从结论看，有两条途径可以遵循：(1)算出x，y，z之值；(2)找出x,y，z之间的关系，把其中一个未知数当作已知数来表示其它两个未知数。显然，要求出结论必须从条件入手。为了简化条件，我们设 $y-z=\alpha$，$z-x=\beta$，$x-y=\gamma$，代入已知条件，得

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2.$$

化简，得 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha=0.$ （1）

（1）式配不成完全平方，既算不出α、β、γ之值，也找不出α、β、γ之间的关系。我们从合成法的思路去考虑，如果能造出一个与(1)式有关的式子，问题可能获得解决。从我们所设，有

$$\alpha+\beta+\gamma=y-z+z-x+x-y=0,$$

$\therefore\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha=0.$ （2）

由(1)+(2)，得 $2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2=0,$

即 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0.$

$\therefore\quad \alpha=\beta=\gamma=0,\ x=y=z.$ 这样找出了x、y、z之间的关系，用z表示x，z，使问题得到解决。

$$原式=\frac{(z^2+1)(z^2+1)(z^2+1)}{(z^2+1)(z^2+1)(z^2+1)}=1.$$

例3 若x_1，x_2，x_3，x_4和x_5满足下列方程组：

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, & (1)\\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=12, & (2)\\ x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=24, & (3)\\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=48, & (4)\\ x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=96, & (5)\end{cases}$$

确定$3x_4+2x_5$的值。（第4届美国数学邀请赛试题）

分析 把已知的五个方程加起来，然后把所得方程的两边除以6，得

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=30. \qquad (6)$$

由方程(4)、(5)分别减去方程(6)，得

$$x_4=18,\ x_5=66.$$

$\therefore\quad 3x_4+2x_5=186$.

例4　已知x，y，z是非零实数，且其中任意一数都是另外两数的比例中项，求证$x=y=z$。

分析　从已知条件可以得到

$$x^2=yz, \tag{1}$$

$$y^2=xz. \tag{2}$$

要从这两个式子推出结论，显然相加、相减、相乘都达不到目的．我们可以采用两式相除．由(1)÷(2)，得

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{y}{x},$$

即　$x^3=y^3$，$(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$。

而　$x^2+xy+y^2\neq 0$，$\therefore\quad x=y$。

同理可证　$y=z$。

故　$x=y=z$。

例5　求证$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$介于$2\sqrt{n+1}-2$与$2\sqrt{n}-1$之间。

分析　本例要先设法构造出两个$\frac{1}{\sqrt{n}}$有关的式子。

$\because\quad (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2>0$，$n-2\sqrt{n}\sqrt{n-1}+n-1>0$，

$2(\sqrt{n})^2-2\sqrt{n}\sqrt{n-1}>1$，

$\therefore\quad 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})>\frac{1}{\sqrt{n}}$。

同理，$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}$。