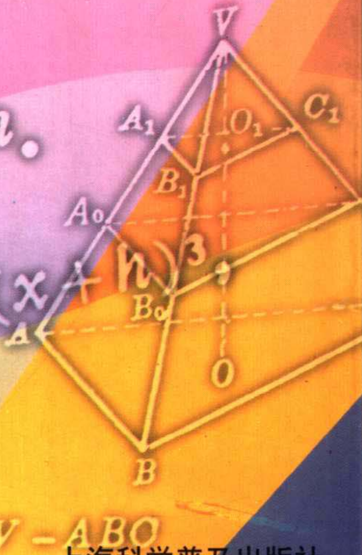
高中版

鲁鹤鸣　许纪传　主编

中学生数学学习手册



上海科学普及出版社

中学生数学学习手册

·高 中 版·

鲁鹤鸣　许纪传　主编

上 海 科 学 普 及 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

中学生数学学习手册:高中版/鲁鹤鸣等编著. 一上海:上海科学普及出版社,1999.9
ISBN 7-5427-1627-1

Ⅰ. 中…　Ⅱ. 鲁　Ⅲ. ①数学课-高中-教学参考资料Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17144 号

责任编辑　胡名正　顾蕙兰

中学生数学学习手册

(高中版)

鲁鹤鸣　许纪传　主编

上海科学普及出版社出版

(上海曹杨路 500 号　邮政编码 200063)

新华书店上海发行所发行　常熟文化印刷厂印刷

开本 850×1168　1/64　印张 12　字数 595000

1999 年 11 月第 1 版　1999 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—8000

ISBN 7-5427-1627-1/O・31　　定价:14.00 元

再版说明

《中学生数学学习手册》出版五年来，受到广大读者的欢迎，并且在第一届全国数学教育图书评选中荣获三等奖。

根据广大读者的要求，在再版之际我们把手册分成了“初中版”和“高中版”，对手册的内容重新进行了审定和编排。

特别是编者回顾了这几年来教学改革的进程及“素质教育”，对手册在“实用、创新”指导原则下的“两个覆盖”的目标提出了更高的企盼。第一，覆盖根据国家教委公布的教学大纲所确定的所有中学数学教学的知识点。第二，覆盖所有中学数学学习中的技能点。

对于中学数学学习中的技能点，不仅有数学概念的理解，数学符号的逻辑推理，运算；更有对数学方法的运用、数学思想的渗透。这些都是在实实在在地影响着一个人的数学素质。对“技能点”的覆盖，是现在和将来我们追求的目标。

在“高中版”的编写中，我们考虑到了高中数学教学的一些新要求；不仅有不同层次的能力要求例

题，还新增加了“应用问题”的章节。

本手册尽可能使高中学生减轻学习负担，改进学习方法，提高数学学习的成效。特别是对于进入高考复习的学生，本手册是一本事半功倍地掌握高中数学知识点和技能点的参考工具书。

对刚起步从事中学数学教学的青年教师，本手册可作为备课参考手册，帮助青年教师更快提高教学水平。

再版后手册仍保留了有些加深和拓宽的内容，使手册的条目尽可能详尽。可以为中等数学爱好者服务，也能作为各类图书馆、资料室的常备工具书。

本手册由杭州高级中学、杭州第二中学、浙江大学附属中学、浙江省教委教研室一些特级教师、高级教师许纪传、鲁鹤鸣、周成熙、龚金根等编写。“高中版”由鲁鹤鸣、许纪传主编，由鲁鹤鸣统稿完成。

尽管再版时编者对每一章节又进行了仔细斟酌，但肯定还有不完善之处。望读者与同仁给予指正。

编　者

1999年10月

目　　录

第一篇　代数 …… 1

§1　实数 …… 1

§2　式 …… 10

§3　方程 …… 42

§4　函数 …… 72

§5　不等式 …… 131

§6　解不等式 …… 138

§7　不等式证明 …… 167

§8　数列 …… 187

§9　数列求和 …… 217

§10　数列的极限 …… 224

§11　复数 …… 229

§12　复数的运算 …… 245

§13　复数与方程 …… 262

§14　数学归纳法 …… 267

§15　排列、组合 …… 274

§16　概率 …… 295

§17　二项式定理 …… 302

§18　二项式定理的初步应用 …… 313

第二篇　平面三角 …… 317

§1　三角函数 …… 317

§2　三角恒等变换…………………………………… 344
§3　反三角函数和简单三角方程………………… 373
§4　解三角形………………………………………… 405
第三篇　立体几体 ………………………………… 427
§1　平面……………………………………………… 427
§2　直线与直线……………………………………… 432
§3　直线与平面……………………………………… 438
§4　平面与平面……………………………………… 449
§5　多面体…………………………………………… 461
§6　旋转体…………………………………………… 495
第四篇　平面解析几何 ………………………… 538
§1　基本知识………………………………………… 538
§2　直线……………………………………………… 565
§3　圆锥曲线………………………………………… 589
§4　坐标变换………………………………………… 660
§5　参数方程………………………………………… 678
§6　极坐标…………………………………………… 701
第五篇　应用问题 ………………………………… 721
§1　二次函数应用…………………………………… 721
§2　方程应用………………………………………… 726
§3　不等式应用……………………………………… 739
§4　一些几何原理的应用…………………………… 754

第一篇 代　　数

§1 实　　数

一、实数的分类

(一) 分类

整数和分数统称为**有理数**. 任何一个有理数都可以表示成$\frac{m}{n}$(m、n为互质的整数,且$n\neq 0$)的形式.

无限不循环小数叫做**无理数**. 任何无理数都不能表示成分数$\frac{m}{n}$(m、n为互质的整数,且$n\neq 0$)的形式.

有理数和无理数统称为**实数**. 实数的分类如下:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(也叫自然数),如 }0,1,2,3,\cdots\\ \text{负整数,如}-1,-2,-3,\cdots\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数,如}\frac{4}{5},\frac{11}{6},3\frac{1}{4},\cdots\\ \text{负分数,如}-\frac{1}{2},-\frac{7}{3},-2\frac{3}{4},\cdots\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数,如}\sqrt{2},\sqrt{5},\pi,e,\cdots\end{cases}$$

实数与数轴上所有点之间是一一对应的,即任何一个实数都可以用数轴上的一个点来表示;反之,数轴上的每一个点又都可表示一个实数.

(二) 有关整数的特性

1. 最大与最小　有最小的正整数 0,但没有最大的正整数;有

最大的负整数-1,但没有最小的负整数.

2. 偶数与奇数　一切能被2整除的整数,叫做**偶数**;一切不能被2整除的整数,叫做**奇数**.通常,偶数用$2n$表示,奇数用$2n-1$(或$2n+1$)表示,其中n取整数.

3. 质数与合数　在自然数中,除了1和它自身以外,没有其他的约数,这个数叫做**质数**(也就是**素数**),否则就是**合数**."0"与"1"既不是质数,也不是合数;偶数中,"2"是唯一的质数.因为自然数的个数是无限的,所以质数与合数的个数也是无限的.

4. 公约数与公倍数　若正整数p是正整数a、b、c、…共同的约数,则称p是它们的**公约数**,其中最大的一个公约数,叫做这几个数的**最大公约数**.

若正整数q是正整数a、b、c、…共同的倍数,则称q是这几个数的公倍数,其中最小的一个公倍数,叫做这几个数的**最小公倍数**.

5. 被2、3、4、5、…等数整除的整数的特征　分别被2、4、8整除的整数的特征是:这个整数的末位数、末两位数、末三位数分别能被2、4、8整除;分别被3、9整除的整数的特征是:这个整数的各位数字之和分别能被3、9整除;被5整除的整数的特征是:这个整数的个位数字是5或0;分别被7、11、13整除的整数的特征是:将这个整数分成两部分,一部分是它的末三位数,其余为另一部分,则这两部分的差分别能被7、11、13整除.若差仍然较大,可进行第二次.例如数93121,$\because 121-93=28$,而28能被7整除,$\therefore$ 93121能被7整除.又如数98366235,$\because 98366-235=98131$,$131-98=33$,而33能被11整除,$\therefore$ 98366235能被11整除.再如数713388741,$\because 713388-741=712647$,$712-647=65$,而65能被13整除,于是713388741能被13整除.

(三)有关小数的几点说明

1. 小数的分类

$$
\text{小数}\begin{cases}\text{有限小数,如 }0.4,2.35,\cdots\\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{无限循环小数,如 }0.\dot{4}2\dot{3},2.1\dot{7}\dot{8},\cdots\\ \text{无限不循环小数,如 }\pi,e,\cdots\end{cases}\end{cases}
$$

$0.\dot{4}2\dot{3}=0.423423423\cdots$是一个纯循环小数(小数点后第一位就开始循环的小数叫做**纯循环小数**),$\dot{4}2\dot{3}$叫做一个**循环节**,$2.1\dot{7}\dot{8}=2.1787878\cdots$是一个混循环小数(小数点后第二位或第二位后的某一位开始循环的小数叫做**混循环小数**),$\dot{7}\dot{8}$就是一个循环节.

2. 有限小数与无限循环小数都是分数,因此是有理数,而无限不循环小数则是无理数.因此,"小数都是有理数"的说法是错误的.

3. 有限小数可以化成分母是 10^n 的分数,例如 $0.3=\frac{3}{10}$,$1.72=1\frac{72}{100}=1\frac{18}{25}$.而无限循环小数可以化成分母是 $99\cdots9$ 或 $99\cdots900\cdots0$ 的分数,例如纯循环小数

$$0.\dot{4}2\dot{3}=\frac{423}{999}=\frac{47}{111},$$

混循环小数

$$2.1\dot{7}\dot{8}=2\frac{178-1}{990}=2\frac{177}{990}=2\frac{59}{330}.$$

(四) 非负实数

实数的绝对值、实数的偶次方以及非负实数的偶次算术根都是非负实数,于是有

$$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|=\begin{cases}a,\text{当 }a\geqslant0\text{ 时};\\-a,\text{当 }a<0\text{ 时};\end{cases}(n\text{ 为大于零的自然数}).$$

非负实数的主要性质是:

1. 有限个非负实数的和仍是一个非负实数;

2. 若有限个非负实数的和等于零,则每个非负实数都等于零.

二、实数的性质

(一) 实数的顺序性　实数可以比较大小.根据实数在数轴上对

应点的位置关系,我们得到比较实数大小的法则:正实数都大于零;负实数都小于零;正实数大于任何一个负实数;两个负实数,绝对值大的反而小.

(二)实数的连续性　从"实数与数轴上的点之间是一一对应的"这一性质就可得出实数是连续的.

(三)实数的稠密性　任何两个不同实数间一定存在着无数个实数.

三、实数的运算

(一)实数的运算在按有关运算法则进行时,特别要注意运算结果的符号和绝对值的大小这两点.

(二)实数的运算律

加法交换律——$a+b=b+a$;

加法结合律——$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$;

乘法交换律——$ab=ba$;

乘法结合律——$abc=(ab)c=a(bc)$;

乘法分配律——$a(b+c)=ab+ac$.

(三)实数的运算顺序可以按下列原则进行

1. 先算乘方开方,再算乘法除法,最后算加法减法.

2. 若有括号,则选算小括号"(　　)",再算中括号"[　　]",最后算大括号"{　　}".

3. 同级运算(加法与减法是同一级,乘法与除法是同一级,乘方与开方是同一级)则按从左到右的顺序进行.

4. 为了简化计算,有时可根据运算定律变更常规的运算顺序.

(四)近似计算

1. 几个概念

(1) 近似数　近似地表示某一个量的数值的数叫做**近似数**.通常,按四舍五入法计算近似值.小于准确值的近似数叫**不足近似数**,大于准确值的近似数叫**过剩近似数**.

(2) 有效数字　一个近似数,从左边第一个非零数字起到右边的最末一个数字(可以是零)止,都叫做这个数的**有效数字**.例如,185.7、2.040都是四个有效数字,而0.048、5.0、0.0030都是两个有效数字.

(3) 精确度　是指一个近似数最右边一个数字所处的位置.例如,5.4、5.40、0.054这三个近似数分别精确到十分位、百分位、千分位.

2. 近似计算

(1) 近似数的加减法　结果的精确度要与最"低"精确度的位数相同,而在计算过程中要多保留一位精确度.

(2) 近似数的乘除法　结果的有效数字个数要与有效数字个数最少的一个相同,而在运算过程中有效数字个数要多保留一个.

理解

1. 判断题*:

(1) 任何一个非零整数的倒数都小于它本身.　(　　)

(2) 绝对值最小的实数是零.　(　　)

(3) 若一个数的绝对值等于它本身,则这个数一定是正数.　(　　)

(4) 正数、负数和零统称为实数.　(　　)

(5) 实数的奇次方是一个非负数.　(　　)

(6) 非负实数中没有最大的实数.　(　　)

(7) 绝对值相等的两个实数一定相等.　(　　)

(8) 任何一个小于1的实数的平方都比1小.　(　　)

(9) 任何正数的平方根都大于零.　(　　)

---

* 本书中的判断题,正确的在题后的括号内打"√",错误的打"×",下同.

(10) $\because 8^2=64$，$\therefore 64$ 的平方根是 8.　　(　)

(11) 10 是 $(-10)^2$ 的算术平方根.　　(　)

(12) 若 a、b 是两个非零实数，则 $a+b$ 也是一个非零实数.

(　)

(13) 两个无理数之和一定是无理数.　　(　)

(14) 若两个实数之和是一个正数，则这两个实数中至少有一个是正数.　　(　)

(15) 两个实数之和一定大于其任何一个加数.

(答案：×，√，×，√，×，√，×，×，×，×，√，×，×，√，×.)

2. 选择题*：

(1) 在"$3^{\frac{1}{2}}$，1.4142，π，0，$\frac{22}{7}$，$\sin 45°$，$\lg 0.1$"这七个数中，无理数的个数是　　(　)

(A) 2 个.　(B) 3 个.　(C) 4 个.　(D) 5 个.

2. 下列结论中，正确的一个是　　(　)

(A) 如 a 是任意实数，则 $-a+|a|\geqslant 0$.

(B) 如 a 是任意实数，则 a 的倒数是 $\frac{1}{a}$.

(C) 如 a 是任意实数，则 $10|a|>9|a|$.

(D) 如实数 a、b 满足 $|a|=|b|$，则恒有 $a=b$.

(3) 若 m 为实数，则 $|m|-m$ 一定是一个　　(　)

(A) 正数.　(B) 负数.

(C) 零.　(D) 非负数.

(4) 如 a 为实数，则下列各式中恒大于零的是　　(　)

(A) $(a+1)^2$.　(B) a^2+1.

---

* 本书中的选择题，每个小题都给出了代号为 A、B、C、D 四个结论，其中只有一个结论是正确的，把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内，下同.

(C) $\sqrt{a+1}$.　　　　(D) $|a+1|$.

(5) 将 0.385995 用四舍五入法精确到万分位,所得近似数的有效数字个数是　　　　( )

(A) 1 个.　(B) 2 个.　(C) 3 个.　(D) 4 个.

(6) 按四舍五入法将 495000 保留两个有效数字的近似数是

( )

(A) 49.　　　　(B) 50.

(C) 5×10^5.　　　　(D) 5.0×10^5.

(7) 计算$(-1)^{1999}+(-1)^{2000}$所得的值是　　　　( )

(A) 0.　(B) -1.　(C) 1.　(D) 3999.

(8) 在"①2 的三次方的相反数、②-2 的三次方、③4 的三次方的算术平方根、④$-\frac{1}{2}$的三次方的倒数"这四个数值中,相等的是

( )

(A) ①、②与③.　　　　(B) ①、②与④.

(C) ①、③与④.　　　　(D) ②、③与④.

(9) 在"① $\sqrt{16}$ 的平方根,②$\pm\sqrt[4]{2}$ 的四次方、③$\pm\sqrt[5]{2}$ 的五次方、④-32 的五次方根"这四个数值中,相等的两个是( )

(A) ①与②.　　　　(B) ①与③.

(C) ①与④.　　　　(D) ②与③.

(10) 一个大于零的正整数的算术平方根是 a,则下一个正整数的算术平方根是　　　　( )

(A) $\sqrt{a}+1$.　　　　(B) $a+1$.

(C) $\sqrt{a^2+1}$.　　　　(D) a^2+1.

(答案:B,A,D,B,D,D,A,B,B,C.)

3. 填空题:

(1) 一个数和它的相反数相等,这个数是____;一个数和它的倒

数相等，这个数是____；一个数和它的绝对值互为相反数，这个数是________.

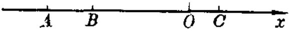
(2) 将下列小数化为分数：

$2.84=$________；$0.\dot{2}\dot{7}=$________；

$4.0\dot{8}\dot{4}=$________；$1.5\dot{8}3\dot{7}=$________；

$0.\dot{9}=$________.

(3) 如图，实数 a、b、c 在数轴上的对应点是 A、B、C，



（第 3 题）

试化简：

$\sqrt{a^2}-|a+b|+|c-a|+|b+c|=$________.

(4) 已知 $0<a<b<1$，试用不等符号连接下列各题中的两个数：

a^2 ____ a，a^2 ____ b，ab ____ a，$\sqrt{a}$ ____ a，$\frac{1}{a}$ ____ $\frac{1}{b}$.

(5) 试在下列两数之间从小到大写出三个数：

①$\frac{1}{8}$与$\frac{1}{6}$：________________；

② $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ ：________________.

(6) 按四舍五入法求近似值：

①将 1.3995 保留四个有效数字是________；

②将 0.37549 精确到 0.001 是________；

③将 80345 保留两个有效数字是________.

(7) 一个数和它的平方互为相反数，这个数是________；一个数和它的立方相等，这个数是________.

(8) 已知 $4.513^2=20.37$，$5.134^3=135.3$，利用科学计数法，则 $451.3^2=$________；$51.34^3=$________；

$0.4513^2=$________；$0.05134^3=$________.

(9) 一个数与它的倒数的4倍相等,这个数等于________;一个整数若加上6得负数,若加上8得正数,则这个整数等于________;一个数若减去4的差的绝对值是2,则这个数等于________.

(10) 直接写出计算结果:

① $-3^2-(-2)^3+(-3)^2-2^3=$________;

② $\sqrt[3]{(-1)^3}+\sqrt{(-1)^2}+(-1)=$________;

③ $(-2)^{2000}+(-2)^{1999}=$________.

(答案:(1)0;±1;任何非正实数.(2)$2\frac{21}{25}$;$\frac{3}{11}$;$4\frac{14}{165}$;$1\frac{324}{555}$;1.(3)$-a$.(4)<,<,<,>,>.(5)① $\frac{1}{8}<\frac{13}{96}<\frac{7}{48}<\frac{5}{32}<\frac{1}{6}$;② $\sqrt{2}<\sqrt[4]{5}<\sqrt[4]{6}<\sqrt[4]{7}<\sqrt{3}$.(6)① 1.400;② 0.375;③ 8.0×10^4 或 8.0 万.(7)0 或 -1;0,1 或 -1.(8)2.037×10^5;1.353×10^5;2.037×10^{-1};1.353×10^{-4}.(9)±2;-7;6 或 2.(10)0;-1;2^{1999}.)

4. 简答题:

(1) 对下列各题进行近似计算:

① $5.376+2.88-6.0193+0.9648$;

② $73.48\times0.27\div26.5$.

解:① 由题意,最后结果应精确到0.01,所以

原式$\approx5.376+2.88-6.019+0.965=3.202\approx3.20$.

② 由题意,最后结果应取两个有效数字,所以

原式$\approx73.5\times0.27\div26.5\approx19.8\div26.5\approx0.747\approx0.75$.

(2) 已知 $m=\sqrt[3a-b]{2a+5b+2}$ 是 $2a+5b+2$ 的算术平方根,$n=\sqrt[2a+b]{7a-8b+2}$ 是 $7a-8b+2$ 的立方根,

求 $m+n$ 的平方根.

解:由题意,得 $\begin{cases}3a-b=2,\\2a+b=3,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$

于是 $m=\sqrt{9}=3$，$n=\sqrt[3]{1}=1$，$\therefore m+n$ 的平方根是 ± 2.

(3) 计算下列各题：

① $3\times(-1)^{100}+(-2^2)\times|(-2)^3|\div 4\div 24-\sqrt{(-3)^2}\div(-3)^2\times(-1)^{101}$；

② $1-\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3-\cfrac{4}{5}}}$；

③ $2^6-\{(-3)^4-[(-1)\div 2.5+2\frac{1}{4}\times(-4)]\div(24\frac{8}{25}-26\frac{8}{25})\}$；

④ $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}+\sqrt[3]{-343}-\sqrt[3]{-27}$.

解：①原式 $=3-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=3$.

②原式 $=1-\cfrac{2}{2+\frac{15}{11}}=1-\frac{22}{37}=\frac{15}{37}$.

③原式 $=64-\{81-[-\frac{47}{5}]\div(-2)\}=64-\{81-\frac{47}{10}\}=-12\frac{3}{10}$.

④原式 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-7+3=-3$.

§2 式

一、比例式

1. 概念　比例式是指两个相等的比所组成的式子. 在比例式 $a:b=c:d$ 中，a 与 d 叫做**比例外项**，b 与 c 叫做**比例内项**，d 叫做 a、b、c 的**第四比例项**. 特别，在内项相等的比例式 $a:b=b:d$ 中，内项