

解题之道

高等数学范例剖析

240 题

钱昌本 著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

解题之道

高等数学范例剖析

240

周志华 著



清华大学出版社
TSINGHUA UNIVERSITY PRESS

解题之道

高等数学范例剖析

240 题

钱昌本 著



西安交通大学出版社

· 西 安 ·

内 容 简 介

解题的教学与训练是高等数学教学的重要组成. 如何使学生喜爱、擅长解题并从中发展自我学习能力, 是困难且诱人的课题. 本书以精选问题的深入剖析, 向读者展现问题解答方案寻求、实现的全过程及反映这一过程的相应思维活动, 旨在让师生从“题海”中求得部分解脱并卓有成效地发展学生的智能. 书中问题以作者编拟为主, 对部分入选“陈题”则追求有别常规的思路与解法. 全书注重从方法论和科学思维规律去处理解题的全过程, 强调意识、直觉、形象思维在解题中的作用.

本书是理工科院校高等数学课程教与学的参考书, 对数学爱好者, 尤其是数学教师有很高的参考价值, 对准备报考研究生、参加高等数学竞赛及关心高等数学课程改革的读者也有较高的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

解题之道高等数学范例剖析 240 题/钱昌本著.
—西安: 西安交通大学出版社, 2004. 6
ISBN 7-5605-1809-5

I. 解... II. 钱... III. 高等数学-解题
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 127204 号

书 名	解题之道高等数学范例剖析 240 题
著 者	钱昌本
出版发行	西安交通大学出版社
地 址	西安市兴庆南路 25 号(邮编: 710049)
电 话	(029)82668357 (82667874(发行部) (029)82668315 82669096(点编办)
印 刷	陕西向阳印务有限公司
字 数	419 千字
开 本	890mm×1240mm 1/32
印 张	14.125
版 次	2004 年 5 月第 1 版 2004 年 11 月第 2 次印刷
印 数	4 001~8 000
书 号	ISBN 7-5605-1809-5/O·188
定 价	22.00 元

版权所有 侵权必究

第二版序

在当今知识经济的社会里,培养高素质、创新型人才的重要性已为人们所共识.高等数学作为大学中一门极其重要的基础课,其作用不仅是为学生提供学习后继课程的基础知识和工具,更为重要的是通过知识的传授,培养读者思维方法和分析问题、解决问题的能力,为高素质、创新型人才的成长奠定良好的基础.启迪学生学习的兴趣和自觉性,在教师的启发诱导下,充分发挥学生的主体作用,让学生自己动脑、动手去探求知识,进行研究式的学习,是培养高素质、创新型人才的有效途径.钱昌本教授长期以来致力于这方面的研究和教学实践,成绩突出.本书是他多年来研究成果和实践经验的结晶.

本书是一本别开生面、令人耳目一新的教学著作.它大大有别于通常见到的关于高等数学复习指导和题解方面的书籍,具有独特的风格.作者摒弃了那种单纯传授知识,甚至应试型书籍的宗旨,而着眼于培养读者获取知识的能力;摒弃了那种模式化、灌输式的教学法,而采用逐步诱导去刺激读者求知的欲望,启迪读者寻求解决问题途径的思维,让读者从被动地接受、记忆,转变为主动地发展自己的智能去发现和创造.

本书上篇通过 120 个问题解决途径的深入剖析,向读者展示了在较困难的问题面前如何起步思考?如何步步深入去接近目标?在遇到困难时如何去坚定信念、开阔思路、深化或改变手法?在了解题方法后,如何去思考、寻找更好的方法?而不是满足于得出解答完成任务;在完成解題后如何去思索总结经验教训以增长自己的智能?等等.笔者认为本书指导思想 and 具体做法,对开发读者智力培养读者创造性思维的意识、兴趣和能力是大有裨益的.

本书自 1994 年出版以来,已重印四次,受到广大读者的喜爱.近年

来随着教学改革的不深入,一些着力于培养数学素养、锻炼能力的新教材和教学参考书不断涌现,但仍有不少应试型的复习资料和题解充斥市场.像本书这样鲜明地以启迪思维、培养能力为主的解题过程的分析和研究,尚不多见.本书许多例题和习题的选择也颇具匠心,文笔流畅,剖析深入浅出,使人感到引人入胜、水到渠成.字里行间还倾注了作者寻求解答的兴趣和感情,对读者具有感染力.不少例子和解法鲜为人知,是作者长期思考和教学实践经验的积累.相信本书的再版不仅对优秀学生的成长,而且对从事高等数学教学的教师都会有很大的启迪和帮助.

马知恩

2003.11

马知恩:首届全国高校教学名师 原国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会
主任 原西安交通大学理学院院长

第一版序

学习一门功课,一要掌握基本理论,二要培养工作能力. 理论和能力是相辅相成的,理论可以帮助学生锻炼能力,但决不会自动转化为能力,因为能力需要亲自动手,通过本身的实践,才能逐步锻炼出来. 学习数学也是如此,比较起来,培养能力更重要、也更困难. 以高等数学而言,教科书成千上万,其中不乏佳作;只要循序渐进,便不难把基本理论学会;但培养能力却远非如此简单. 怎样指导学生做好习题,同时在做题的过程中培养发现新定理、创造新理论的本领;怎样从实际中提炼数学问题,抽象成数学模型,并逐步求解,以满足实际的需要,这一整套联系实际的能力如何训练,至今似乎还没有成熟的经验,有关的书也不多. 如果说有,也大半是习题集或习题解答. 这类书是需要的,但还不够,因为它们大多限于列举一些题目,给出提示或解答就完事. 至于为什么选这些题,解题前应如何思考,从何下手,解完后有哪些经验可以上升成为一般的思想方法、一般的解题原则,从而解决一大类问题,甚至提出新问题、创造新理论,则很少讨论.

国际上,关于数学教育的名著也寥如晨星,影响较大的,也许数美籍匈牙利数学家、教育家波利亚(G. Polya)的三部姐妹作《数学与猜想》、《怎样解题》、《数学的发现》,它们影响很大,确是名作. 不过他熟悉的是西方的教育,对中国的教育、中国人思维的特点,并不太了解. 因此,我们更需要切合我国实际的相应著作.

这本《高等数学解题过程的分析和研究》可以称得上是符合上述要求的好书. 作者钱昌本先生热爱教育,更热心于培养学生自学的能力,不满足于灌输式的教学方法. 他的教学法宗旨是变学生的被动接受为主动进取,本着这种教学思想,他在西安交通大学教改试点班主任 5 年,取得了

显著效果,培养了许多优秀学生,从而三次获得优秀教学成果奖. 他的经验引起了同行的兴趣,大家希望他能把他的教学思想和内容写成教材或讲义,这本书就是应此需要而写的教学参考书. 本书大大不同于一般的习题解答,它突出智能培养而有别于“传授型”或“模式化”的书籍. 全书以 120 个高等数学问题为主,来展开剖析,寻求解答的过程及反映这一过程的思维活动,以便开拓思路,培养解题和发现新事物的能力. 这些题目主要是作者编制或积累的. 本书第二部分另列了 120 个习题,以供读者自习;这些题先有提示,后有详细解答.

作者在本书中倾注了 20 余年长期的思考和实践经验,具有别开生面的独特风格. 例如,有些难题的解答需要作辅助函数,一般书上只简单地引进这一函数,至于如何想到它,则语焉不详甚至只字不提. 本书则通过逐步分析、层层推理,最后引导到辅助函数的自然出现,使人决无天外飞来之感. 由于这些特点,我们深信本书的出版,对高等数学的教师、学员和爱好者会有很大的启迪和帮助.

王梓坤

1993. 9.

作者的话

本书第一版名为《高等数学解题过程的分析 and 研究》，它由科学出版社出版问世至今已快十年了，期间曾四次重印，受到读者的欢迎。

第二版在保留原来的内容结构和行文风格的前提下，对初版做了少量的删补和修订，希望能以更完美的面貌奉献给读者。

本书注重从方法论的角度和科学思维的规律去探求和揭示解决问题的本质所在，追求对学生的智能发展和素质培养。然而，对此浓彩重抹的同时，在内容的安排上就难以与教材完全同步。好友冬生建议我添加个附录，将书中的例和题按照常规教材的章节对号入座，列出索引。这样，就为正在学习高等数学的学生使用本书提供了极大的方便。我高兴地采纳了此建议。

笔者曾在西安交通大学从教近二十年，那里有许多令我难忘的人和事。而本书也正是自己在西安交通大学教改试验班担任数学主讲时，在教学中实施学生智能培养的部分反映。由西安交通大学出版社来出本书的第二版，也了却了我的一桩心愿。

感谢我的恩师、全国高校工科数学课程教学指导委员会主任、首届全国高校教学名师马知恩先生为本书作序。感谢我的好友叶涛先生为本书再版所付出的精心劳动。此外，我还要感谢以下诸位恩师及好友，他们是：王梓坤先生、徐利治先生、齐东旭先生、朱儒楷先生、刘西垣先生、向隆万先生和陈冬生先生。感谢他们为本书的完善提供了多方面的宝贵意见和切实帮助。

钱昌本

2003年12月12日于桑浦山

第一版前言

在科学技术迅猛发展并向传统教学提出严重挑战的今天,“教学必须以培养能力为主,努力做到增长知识与发展能力相统一”的观点已日益为人们所广泛接受。如何在教与学中发展学生的智能已成为普遍关注的问题。

传统的“系统指导型”教学中,学生主要以接受学习的方式来获取大量的文化科学知识。在接受学习中,所学的知识往往以定论的形式呈现给学生,要求学生对所学材料加以内化,以便今后所需时可再现。这种接受学习的模式无需学生去探索、去追求、去发现,较少要学生用自己的思维去克服障碍。相反,这里需要的是理解、记忆、巩固和再现。这种既舒服又乏味的学习束缚了学生思维的发展,有碍于学生能力的培养,从而也无法培养起学生探究问题的态度、行为和方法。实际表明,一个长久采用被动接受学习模式去学的人,他思维往往具有封闭、求同、单向、直观、超稳定和亚节奏等特点。这正好符合了几千年来大一统的封建社会结构所强化固定下来的中国传统思维模式,而这一思维模式的影响正是我国近代科技发展迟缓的重要原因之一。人才的培养关系到国家强盛、民族振兴和人民富裕,考虑到新形势下对人才培养的要求,改变学生被动接受学习的传统模式已成为当前教育改革中亟待解决的问题。

为使学生变被动学习为主动进取,变记忆学习为认知学习,无疑,关键在于教师在教学活动中的主导作用。为此,应尽量削弱那种容易导致学生被动接受的说教式传授,加强教师指导下的学生自己的认知活动。教师要努力去创造有利于学生独立思考的情境,为学生安排各种富于发现的机会,提出具有诱发性的问题,为学生提供求知的刺激,使学生通过动脑、动手去亲身探究未知的事情,去解决未知的问题,去捕获知识,去增长能力。为达到这一目的,加强解题教学与训练无疑是极为有效的。

就高等数学课程而言,国内外已出版了大量的题集和解答集。为配

合循序渐进的数学,为达到教学的“巩固性原则”,这类题集必不可少是自然的。然而,这种题集的着眼点往往是量,是资料性;追求的是规范性练习的笔头操练,是对套路和规则的执行。考虑到时代发展对人才培养的要求,仅有这类题集已远远不够。如何实现教材、教学参考书、题集从“传授知识型”到“发展智能型”的转变,正待广大教育工作者去奋力探索。

解题教学与训练是高等数学教学的一个重要组成部分。如何使学生喜爱、擅长解题并从中发展自我学习力,是困难而又诱人的一个课题。笔者在担任西安交通大学教改试验班数学主讲的的教学中,对此曾做过有益的摸索,本书正是这一工作的点滴反映。书中第一部分试图以120个例题的深入剖析,向读者展现“寻求思路、拟定解答方案、实现方案和回味”的解题过程及反映这一过程的相应的思维活动,旨在开拓思维,发展能力。解题是一种高级心理活动,它与科学的思维方式、熟练的技巧、涉及知识的强烈使用意识等密切相关。而这一切决不能单凭摹仿和博览下的“见多识广”所能解决,更不能靠处方式的解题模式的牢记与套用。解题能力必须由实践才能得到发展。本书的第二部分为读者提供了练习训练的机会。那里的提示给出了通向解答的某一途径;那里的解答不仅给出了答案,也给出了由提示所揭示的念头到得出答案的详尽过程。第二部分作为全书的重要组成同样反映了本书的宗旨。书中例与题以笔者编拟为主,部分“陈题”则追求有别于常规思路与解法的处理,以突出新意。笔者无意追求系统和全面,只想从方法论角度和科学思维规律去展现解题的过程。

笔者真诚地期望读者能从本书获得点启发而有所裨益。

鉴于笔者学识浅陋,理解和研究尚不够,错漏不当恐难幸免,恳请读者指教。

本书承蒙王梓坤院士在百忙中抽时间审阅,并撰写了序言。在成书的过程中,得到了齐东旭教授、朱儒楷教授和陈冬生教授的热情鼓励和切实的帮助。朱红为本书的完成付出了辛勤的劳动。汕头大学和科学出版社的有关领导对本书的面世也给予了热情的支持,在此向他们表示衷心的感谢。

钱 昌 本

1993年10月于汕头大学

目 录

上篇 溯本求源 · 120 例

一、怎样解题的例..... (3)

解题意味着从困难中寻找一条越过障碍的路,使我们能够达到一个不易即时到达的目标.然而,这样一条通向目标的路又该如何去寻找?

二、意识在解题中的作用..... (15)

解题是一种高级心理活动,在解题过程中意识将起着特殊的调节作用,这种作用表现为意识使人在头脑中进行活动,并在头脑中产生概念、思想和计划来指导自己的解题行动,使解题活动更具有目的性、方向性和预见性,从而使解题过程有效地完成.

1. 已有知识的使用意识 / 15

对某些技巧、方法或知识的强烈使用意识往往会使问题得到简洁的解法.

2. 深究意识 / 18

两个“重要极限”究竟为什么重要?几乎所有的教材都没有直接点出来.

3. 判断意识与预测意识 / 23

倘使认定最初的思路,将逐次求导“顽强”地执行下去,必然会陷入困境!

4. “加工转化”的意识 / 26

对所给的对象适当改造加工往往会使解答简捷,事半功倍.

三、关于“套路”与“散打”的问题 (32)

解数学题中也有类似于武术的套路与散打的问题。“遇到这类题目应该这样去做……”；“遇到那样的题目应该那样去做……”。如此等等。但是，仅满足于使学生弄懂、记牢从老师或书本得来的知识和方法并通过练习以期达到必要时能够加以准确再现是不够的。

1. 分解、拼合与问题对、问题组 / 32

通过拼合与分拆，可从其中某问题的结果马上推断导出另一个的结果来。

2. 借助于直观形象 / 35

我们多么希望对称中心能落在 x 轴上！

3. 如果它是所求解 / 41

我们只得先抛开套路，另求它法！

4. 关于思维定势 / 45

人对某些事习以为常，而对其“反面”总感到不自然而难以接受。

5. 一个重积分例的解答 / 51

题中积分域虽简单，但其位置却使我们为难。

6. 抓住问题的本质 / 55

解答完全可以不求偏导函数，我们从偏导数的本质去引出另一解法。

四、关于微分中值定理 (60)

“在一定的条件下，可以肯定在所给的区间内至少有一点，使得我们研究的函数在该点具有一定的微分性质”，这就是微分中值定理。它是微分学的理论基础，从它出发，可以导出一系列重要的命题和定理，从而使微分学在更广的范围内起着极其重要的作用。

1. 定理的引入 / 60

直接陈述出定理内容，不免使人感到神秘，不妨从一个几何事实出发去探求。

2. 定理的证明 / 62

在此，只想突出直觉在发现问题和解决问题中的作用。

3. 定理的应用的例 / 67

反证法应比直接证法更优越。因为否定结论 B ，即设非 B 。

五、辅助元素 (74)

在解几何问题时,我们常常需要在图中引入新的线,即辅助线.在解代数问题时,我们有时要引入辅助未知数.在求解高等数学的许多问题时,往往也需要引入辅助元素.当然,这新的元素可能是角、是线、是面;也可能是变量或函数;甚至可能是一个辅助定理或辅助命题.

1. 辅助角、辅助线和辅助面 / 74

不难看到它们的共同点是辅助线的引入使问题产生了某种对称性.

2. 辅助函数 / 82

如何才能找到合适的辅助函数,是一件令人伤脑筋的事.

3. 辅助问题 / 90

找一个辅助问题,使我们绕过一个不易直接克服的困难去达到目的.

六、推广与收缩 (99)

通俗说,推广是将问题普遍化,而收缩是将问题特殊化.综观整个“高等数学”内容的展开,就是一个不断推广的过程.大到从单变量函数微积分推广到多变量函数微积分,小至导出某个具体问题的普遍形式.

1. 层次的推广 / 99

有价值的推广常常能给人以启迪,结果也往往十分有用.

2. 形式的推广 / 108

这些逐一的重复推广是否可抽象为统一意义下的一个有价值的推广呢?

3. 情境的推广 / 114

值得注意的是从“数字”到“字母”的推广.

七、“凑”的技巧 (120)

“凑”的技巧不那么“正统”,常常被视为“雕虫小技”之类,但是,“凑”的技巧在解决许多问题时却有奇效,显得非常实用.关于这点恐怕无人否认.正因“凑”的小技常常施用于问题求解的关键部位与时机,成为促进成功的关键一步,所以倍受大家青睐.

1. “凑”的使用意识 / 120

是否可以利用有益信息的念头,使人想到了“凑”.

2. “凑”的具体手法 / 124

“凑”的一般手法,无非是“加上某项再减去某项”,“乘以某项再除以某项”.

八、对称与对称性 (138)

在某些问题中,我们利用了问题涉及的数学对象本身具有的对称因素去解答问题.但有些问题给出的数学对象原本并不具有什么对称性;或者所具有的对称因素不明显外露,而在强烈意识驱使下,我们借助于一定的手法制造或揭示了问题蕴藏着的对称性,并利用它得到了问题简捷的解答途径.

1. 对称函数的求导问题 / 138

对任一变元所得的结果都可经变元(字母)的对换直接转移到其它变元.

2. 图形的对称 / 142

$f(x)$ 的图形具有对称性,则函数的运算的每一步,直至结果也将具有相应的对称性.

3. “对称”在积分中的应用 / 148

这一结论的应用,在重积分、曲线积分和曲面积分中却往往被忽视.

九、关于一题多解 (157)

滥演百题不如精做一题.精做的方式之一就是力求一题多解.倘若面对的问题不是只须“代公式”去毫无遗漏地执行某一程序的话,你就应该尝试从不同的出发点、途径、方法和程序去求解它.如此,至少有这样几个好处……

十、关于综合题和应用题 (189)

以循序渐进的方式,逐章逐节地学习“高等数学”,对于每个学习者来说,不但可行而且几乎不可替代.然而,在这种追求课程自身完整与系统的思想指导下展开的教学,往往注重学生对基本知识是否掌握,基本技能是否熟练.至于如何使学生能通晓基本理论,如何使学生在综合运用知识去解决问题等方面得到应有的训练,则显得十分薄弱.

1. 综合题的例 / 189

单位正方体绕其对角线旋转所得的旋转体的体积应如何求得?

2. 应用题的例 / 219

为使炮弹内装药量尽可能地多,应该如何设计药柱的截面形状?

下篇 感悟求道 · 120 题

一、问题 (260)

学数学最好的办法是“做数学”,为给读者提供练习的机会,这里给出了120个问题.请记住数学家 P. R. Halmos 的名言:“问题是数学的心脏”.

二、提示 (275)

这里的提示给出了一种通向解答的途径.

三、解答 (286)

这里的解答不仅给出了答案,也给出了由“提示”所揭示的解题念头到得出答案的过程.

附录 例题、习题索引 (432)

出版后记 (434)

上
篇

溯本求源
·
120
例