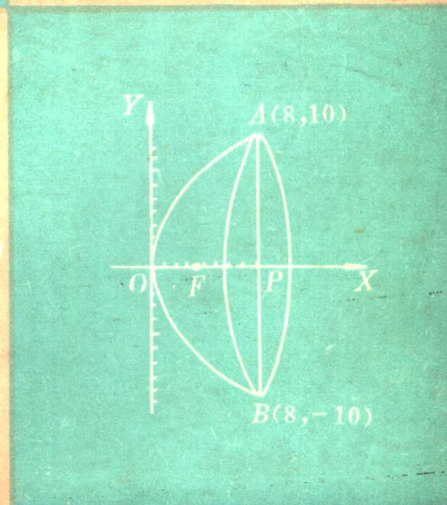
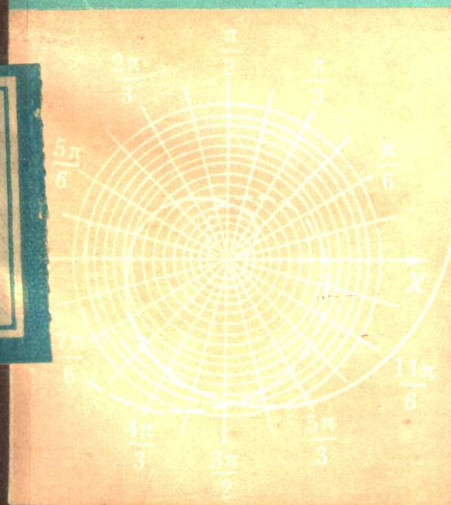
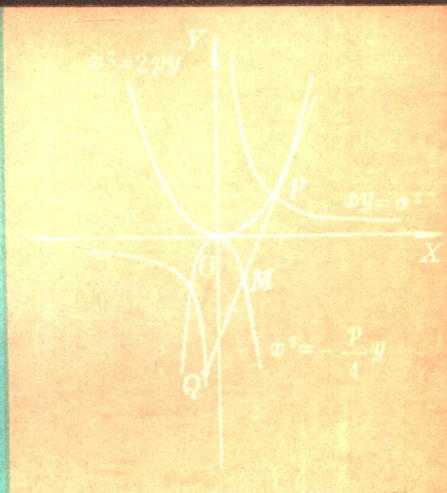
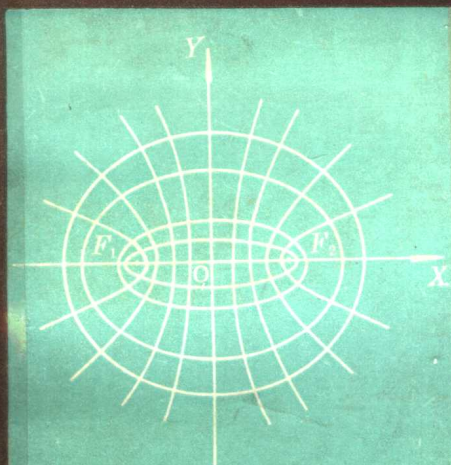


解析几何教学法

朱石凡 编著



解析几何教学法

朱石凡 编著

湖南教育出版社

解析几何教学法

朱石凡 编著

责任编辑：孟实华

*

湖南教育出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1984年2月第1版第1次印刷

字数：130,000 印张：6.5 印数：1——14,000

统一书号：7284·315 定价：0.62元

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1 解析几何的教学目的	(1)
§ 2 解析几何教学内容的安排	(4)
§ 3 解析几何教学方法的特点	(7)
第二章 直角坐标系	(13)
§ 4 有向线段	(13)
§ 5 平面直角坐标系	(15)
§ 6 平面内两点间的距离	(16)
§ 7 线段的定比分点	(20)
第三章 直线方程	(24)
§ 8 直线方程的开头课	(24)
§ 9 直线的倾斜角和斜率	(26)
§ 10 直线方程的几种特殊形式和一般形式	(28)
§ 11 两直线平行和垂直的条件	(34)
§ 12 两直线的交点	(39)
§ 13 点到直线的距离	(42)
第四章 圆的方程	(49)
§ 14 圆方程的三种类型	(49)
§ 15 圆的切线	(57)
第五章 椭圆、双曲线和抛物线的标准方程和性质	(64)
§ 16 曲线和方程	(64)

§ 17	椭圆的标准方程	(67)
§ 18	椭圆的性质	(72)
§ 19	双曲线的标准方程	(80)
§ 20	双曲线的性质	(85)
§ 21	抛物线的标准方程和性质	(96)
§ 22	圆锥曲线的切线和法线方程	(107)
§ 23	圆锥曲线系	(117)
第六章	坐标变换	(122)
§ 24	坐标轴的平移	(122)
§ 25	坐标轴的旋转	(132)
第七章	极坐标和参数方程	(145)
§ 26	极坐标系和极坐标	(145)
§ 27	曲线的极坐标方程	(153)
§ 28	参数与参数方程	(169)
§ 29	直线与圆锥曲线的参数方程	(173)
§ 30	利用参数方程求轨迹	(189)

第一章 绪 论

根据教育部1977年颁布的《全日制十年制学校中学数学教学大纲》(试行草案)的规定,中学数学教学的目的是:“使学生切实学好参加社会主义革命和建设,以及学习现代科学技术所必需的数学基础知识;具有正确迅速的运算能力、一定的逻辑思维能力 and 一定的空间想象能力,从而逐步培养学生分析问题和解决问题的能力。通过数学教学,向学生进行政治思想教育,激励学生为实现四个现代化学好数学的革命热情,培养学生的辩证唯物主义观点。”

中学平面解析几何(以下简称解析几何)是中学数学的组成部分,在达到上述教学目的中,它起着特殊重要的作用。以下分节予以研究。

§1 解析几何的教学目的

解析几何的特征,在于“在采用了坐标方法的同时,运用代数方法来研究几何对象”,在“形”与“数”结合的紧密程度上,是中学数学其它科目所不能比拟的。通过解析几何的学习,学生在基础知识的学习,各种能力的培养,解题方法的研究等方面,都能得到训练。现从三个方面来说明。

1. 在基础知识方面:

在解析几何中, 首先, 明确地建立了坐标系的概念, 特别是直角坐标系和极坐标系的概念。对于一个平面几何图形, 必须教会学生善于选择图形中适当的点和线, 作为直角坐标系的原点和坐标轴来建立直角坐标系, 或者以其作为极坐标系的极点和极轴来建立极坐标系, 从而通过运算研究这些几何图形的性质。

其次, 有关直线方程的几种表达式, 二次曲线方程的标准形式及其元素间的关系和性质, 非标准形式的曲线方程, 在通过坐标轴的平移和旋转变换后, 转化为标准形式的曲线方程, 而研究其性质等, 这些都是学生必须掌握的解析几何的主要基础知识。

第三, 有些常用的曲线, 如等速螺线、心脏线、圆的渐开线和摆线等方面的知识, 由于它们在生产实践中都有很大的实用价值, 应当让学生有所了解, 适当地进行教学。

第四, 使学生学会引入参数, 建立符合某些条件的点的轨迹的参数方程, 以研究点在运动中的变化规律。

解析几何的这些基础知识, 广泛地综合运用了代数、三角、几何图形等各方面的基础知识, 将它们进行了有机的结合, 赋予了数量间的关系。因此, 通过学习解析几何, 学生的基本技能也能得到很好的训练。

2. 在培养能力方面:

学习解析几何, 需要根据已知条件建立方程, 或者根据已知方程, 讨论它所代表的曲线的性质, 这样, 运算能力无疑地能

得到很好的培养，除此之外，逻辑思维能力和分析问题解决问题的能力，也能极大地得到提高。

恩格斯说过：“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，……”（《自然辩证法》人民出版社1971年版第236页）。研究变数虽然主要是数学分析的任务，但是“变量数学的建立，第一个决定性步骤仍在于解析几何”。这是因为，解析几何的基础是建立在“形”与“数”的根本联系上的，对解析几何中的图形，是作为符合某个条件的动点在运动过程中所产生的轨迹而进行研究的。这里面自始至终包含着辩证法的联系、运动、变化的因素。

例如，平面内的一个动点，若依照到两定点的距离的和为定值的条件而运动，产生的图形是椭圆；又如，尽管椭圆、双曲线和抛物线是不同形状的图形，也具有不同的性质，可是它们却可以统一用极坐标方程

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\varphi}$$

来表示；如此等等。可见，学习解析几何还有益于培养学生的辩证思维能力。因此，在教学中，教师要有意识的强调这些逻辑因素，恰当地向学生进行辩证唯物主义观点的思想教育。

3. 在研究解题方法方面：

解答解析几何习题，与解答数学其他科目的习题相比较，虽然在解题步骤上——审清题意、拟定解题计划、正确解题、审查答案等，是基本相同的，但是，在解题方法上，它有特殊之处。解答解析几何题，首先是要正确地作出符合已知条件的

图形，设立若干已知点的坐标和需确定的点的坐标，为解题作好准备。其次，依据图形的直观形象，将已知条件中的几何性质，转化为用代数式或代数方程表达的形式。例如，几何性质为直线 l_1 垂直 l_2 ，转化为代数形式是斜率 $k_1 \cdot k_2 = -1$ 。只有在完成了这种转化之后，才能进行以后的计算和讨论。第三，解析几何习题，绝大部分是研究方程的特性，而确定一个方程，主要是方程中的次数和各项系数，因此，研究解析几何的解题方法，实际上是研究如何建立一个或几个方程中，各项系数之间的相互关系，从而确定图形的类型及其相互位置关系。

综上所述，中学解析几何的教学目的，归纳起来应该是：使学生能利用坐标平面内点与有序实数对之间的一一对应关系，运用代数的理论和计算方法，来研究常用的平面几何图形的性质；弄清曲线与方程的关系；发展学生的逻辑思维特别是辩证思维的能力；培养学生运用所学的知识解决一些实际问题的能力；提高学生的计算、绘图的技能技巧和观察概括问题的能力，并发展空间想象能力。

§2 解析几何教学内容的安排

解析几何教学内容的安排，与其他数学科目（代数、平面几何、三角）的学习是紧密相连的，互相促进的，教师必须掌握它们之间的联系。

一、进入解析几何学习前的准备阶段

鉴于解析几何是运用解析法论证几何图形性质的科学，因

此在学习平面几何和代数的过程中，应为学习解析几何作好准备。

在初等几何方面：如命题的组成，四种命题的关系，论证中的归纳、演绎、分析、综合方法和论证技巧，平行、垂直、交角、交点、轨迹等基本概念和一些基本定理等知识；

在初等代数方面：集合与集合之间的对应（一一对应），方程（组）与方程（组）的解，函数及其图象，一次函数与二次函数，三角函数的恒等变形等等知识。

这些知识，都在学好解析几何中起重要作用，并在学习解析几何过程中，得到发展和提高。

二、系统学习解析几何的阶段

根据“把精选出来的代数、几何、三角等内容和新增的微积分等内容，综合成一门数学课”的要求，把解析几何的内容与其他科目紧密联系起来，又自成系统进行教学。

1. 直角坐标系

通过平面直角坐标系建立平面上的点与有序实数对之间的一一对应关系，从而确定平面内两点间的距离和线段的定比分点坐标。“数”与“形”的结合，便是由此开始研究的。

2. 直线方程

这一部分在解析几何中是重要的内容。研究曲线和方程的理论，从建立直线方程开始，就应予以充分重视，但又不能要求过高。已经学习了的一次函数和二次函数，对学习直线方程有直接影响。由一次函数的图象是一条直线而推出直线的点斜式和斜截式，然后根据斜率推出两点式和截距式，最后论证了

一般式。直线的这五种形式，要能够根据条件灵活选择运用，并能进行互化。作为直线方程的应用是直线型经验公式和两直线的位置关系。

3. 圆锥曲线

研究圆锥曲线必须深刻理解曲线和方程的概念。因此，曲线和方程的理论，必须在开始学习圆锥曲线时予以加深。依据平面内与定点距离等于定长的点的轨迹，建立圆的方程；由平面内与两定点的距离的和等于常数的点的轨迹，建立椭圆方程；由平面内与两定点的距离的差的绝对值是常数的点的轨迹，建立双曲线方程；由平面内与一个定点和一条定直线的距离相等的点的轨迹，建立抛物线方程。

本章除了在研究方法上，必须运用联系、运动、变化的辩证观点外，还必须具有较多的代数式的恒等变形和方程的同解变形的基础知识。

4. 坐标变换

圆锥曲线都是轴对称图形，当它们的对称轴与坐标轴平行，而中心或顶点不在原点时，需将原坐标轴进行平移变换；当它们的对称轴与原坐标轴不平行时，需将原坐标轴进行旋转变换。这样，就可以将圆锥曲线的非标准方程，化为标准方程进行研究。利用移轴和转轴化简一般二元二次方程，并通过对一般二元二次方程的讨论，总结出一种利用判别式 $B^2 - 4AC$ 来判别方程类型的方法。

5. 极坐标与参数方程

同一个点或同一条曲线，在不同的坐标系内，有不同的坐

标或方程，它们之间能互相转化，这在直角坐标轴的平移和旋转中已有体现。学习了极坐标系和极坐标以后，这种转化的思想和能力更能得到提高。一些在直角坐标系中，不便于作图的重要曲线(如等速螺线，四叶玫瑰线等)，在极坐标系中就显得方便了。

借助于参数研究曲线的参数方程，便于研究符合某些条件的点的轨迹方程。解析几何中，除了研究直线和圆锥曲线的参数方程外，还研究了圆的渐开线、摆线及其参数方程。

§3 解析几何教学方法的特点

根据解析几何学科的特点，研究了它的教学方法，才能取得良好的教学效果。归纳起来，必须遵循下列几个特点进行教学：

一、“形”与“数”相结合

因为有序实数对与直角坐标平面上的点是一一对应关系，所以必须使学生学会用数值关系说明几何关系，和反过来把几何关系反映成数值关系。

例如，两直线的斜率相等是数值关系，反映在几何关系上是两直线平行。

又如，过抛物线焦点的一条直线与它交于两点 P 、 Q ，通过点 P 和抛物线顶点的直线交准线于点 M ，求证：直线 MQ 平行于抛物线的对称轴。

本题若取抛物线的对称轴为 X 轴，顶点为原点，建立直角坐

标系，则几何关系是直线 MQ 平行于 X 轴，反映出的数值关系是证明 M 与 Q 点的纵坐标相等。

类似这种数值关系与几何关系的转换，在解析几何的学习中，随时都会遇到，教师必须按照这个特点进行教学，培养学生根据这个特点进行思维的思想方法。

二、运动与变化相结合

点的运动，必然引起对应点的坐标变化；反之，点的坐标的变化，也必然引起对应点的运动。点的运动形成符合几何条件之点的轨迹(图形)，点的坐标变化形成反映几何条件的方程，两者之间有着依存关系：坐标适合方程的点在图形上；在图形上的点的坐标适合方程。

解析几何的两类基本问题，根据几何条件建立方程和根据方程研究图形的性质，都是按照运动与变化的特点进行研究的，它是解析几何的基本观点。

例 从极点作圆 $\rho = 2a\cos\theta$ 的弦，求各弦中点的轨迹方程。

解 如图3—1，设 OA 为圆的任意一弦， A 点的坐标为 (ρ_1, θ_1) ， P 为 OA 的中点，坐标为 (ρ, θ) 。依题意

$$\theta_1 = \theta, \quad \text{①}$$

$$\rho_1 = 2\rho, \quad \text{②}$$

$$\because A \text{ 点在圆上}, \therefore \rho_1 = 2a\cos\theta_1, \quad \text{③}$$

以①、②代入③，得 $2\rho = 2a\cos\theta$,

$$\text{即 } \rho = a\cos\theta.$$

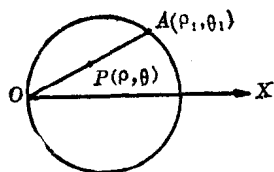


图3—1

此为所求P点的轨迹方程。

A点在圆周上运动，形成过O点的各弦，引起P点始终保持为OA中点的条件而变化。A点的坐标依着适合方程 $\rho = 2a\cos\theta$ 而变化，引出P点的坐标形成适合 $\rho = a\cos\theta$ 方程。

三、直观与推理相结合

教师在教学过程中，不论是阐述概念，证明定理和解题示范，首先必须根据条件作出对应图形和应有的符号标记，根据图形的直观形象，思考解题途径，然后进行推理和演算，完成其它步骤。学生在做习题时，也必须特别强调，首先根据方程或已知几何条件绘出图形，然后解题。这是解析几何教学的基本训练和基本技能。教师应举出因未先绘图形而带来复杂的解题演算或迷失解题方向的具体例子，来教育学生养成解题必作图的良好习惯。

例如，求证：A(2, 2)、B(5, 3)、C(3, -1)、D(6, 0)四点共圆，并求出此圆的圆心坐标和半径的长。

本题若先作图形，可以观察到 $AB \perp AC$ ， $BD \perp DC$ ，通过计算斜率确有这个结论，问题迎刃而解。有的学生由于未作图或未仔细观察图形，采用求过三点的圆的方程，再证明第四点也在这圆上，然后通过配方求圆心坐标和半径的方法，这种解法遇到解三元一次方程组和配方，会使计算复杂化，且容易产生错误。

四、理论和实际相结合

课本中的例题和习题，举出了解析几何知识在工业、国防、天文和物理等方面的运用，这些有实用价值的例子，应当引导

学生仔细思考,培养学生将实际问题归结为数学表达式的能力。这些例子是数学应用的广泛性的一种体现,可以激发学生学习解析几何的兴趣,还可以提高学生对要求解答准确性的重要性的认识。

例如,学习等速螺线后,要求学生设计并制作一个凸轮,使它等速旋转时,推动的从动杆的最大行程为5cm,等速前进和等速后退的时间为2:1,学生就会觉得对等速螺线的极坐标方程,根据方程求点的极坐标等知识,了解得更加清楚。

五、特殊与一般相结合

解析几何某些结论,有时需要从特殊推广到一般。有时需要由一般来了解特殊。例如,研究直角坐标平面内两点间的距离公式,需要从两点在坐标轴上,推广到两点在第一象限,再推广到两点在不同的象限,然后得出结论。不论两点的位置如何,距离公式 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 都是适用的。这种方法是由特殊推广到一般。又如,研究了圆心在 (ρ_1, θ_1) ,半径为 r 的圆的极坐标方程为 $\rho^2 + \rho_1^2 + 2\rho\rho_1\cos(\theta - \theta_1) - r^2 = 0$,在 ρ_1, θ_1 取特殊值时,可得到特殊位置的圆方程。

(1) 当 $\rho_1 = 0$ 时,得圆心在极点的圆方程 $\rho = r$;

(2) 当 $\theta_1 = 0, \rho_1 = r$ 时,得圆心在极轴上且过极点的圆方程 $\rho = 2r\cos\theta$;

(3) 当 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \rho_1 = r$ 时,得圆心在 $\frac{\pi}{2}$ 线上且过极点的圆方程 $\rho = 2r\sin\theta$ 。

这种方法是从一般研究特殊。

由于把特殊与一般结合起来，符合人们认识事物的规律，所以它也是学习解析几何的特点之一。

六、理解与记忆相结合

学习任何科学知识，离开记忆是不行的，学习解析几何课程也是这样。由于解析几何的公式较多，曲线方程和图形的性质比较复杂，加上运用的知识比较广泛，因此必须记住一定的基础知识，不然就无法灵活运用。但是，又必须在理解和联系的基础上加强记忆。

例如，两直线的交角公式

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1},$$

它是由两角差的正切公式推导出来的。必然在计算角 α 时，要考虑角旋转的方向，也就引出公式中 k_2 、 k_1 是代表哪条直线斜率的问题。事实上，若 $\alpha = \beta - \gamma$ ，则 $\operatorname{tg} \beta = k_2$ ， $\operatorname{tg} \gamma = k_1$ 。 β 、 γ 分别是按逆时针方向的第二、第一直线的倾斜角， k_2 、 k_1 就分别是第二、第一直线的斜率，它们相减是交角公式的分子。因此，只有在理解了交角、 k_1 和 k_2 意义的基础上，把交角公式与两角差的正切公式联系起来，记住公式就不困难了。

七、把解析几何与其它数学科目相结合

学好解析几何需要用到大量的代数、平面几何和三角知识，解决一个问题，往往需要从图形的几何性质，归纳出进行代数或三角方面的恒等变形，通过较复杂的运算，才得出结论。可以说解析几何是代数、几何与三角知识的综合运用。在学习解析几何过程中，又是对代数、几何与三角知识很好的复习过程。

教师应当重视把学习新知识与复习旧知识结合起来，为学生进一步学好微积分打下良好的基础。