高等学校试用教材

弹性力学

上册

徐芝纶 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

弹性力学

上 册

徐芝纶 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

弹 性 力 学

上　册

徐芝纶 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张12,625 字数 300,000

1979 年 1 月第 1 版　1979 年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001—30,000

书号 15012·0109　定价 1.25 元

目　录

（上　册）

第一章 绪　　论

§ 1-1 弹性力学的内容

弹性体力学，通常简称为弹性力学，又称为弹性理论，是固体力学的一个分枝。弹性力学研究弹性体由于受外力作用或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

建筑工作者研究弹性力学，为的是深入分析各种建筑物或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有充分的强度、刚度和稳定性，并寻求和改进它们的计算方法。因此，弹性力学也列为建筑力学的一个部分。这样，建筑力学就分为三门学科，即材料力学，结构力学和弹性力学。

这三门学科在研究对象上有所分工，在研究方法上也有所不同。

在材料力学里，基本上只研究所谓杆状构件，也就是长度远大于宽度和厚度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转等作用下的应力和位移，是材料力学的主要研究内容。在结构力学里，主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构，也就是所谓杆件系统，例如桁架、刚架等等。至于非杆状的构件，例如板和壳，以及堤坝、地基等实体结构，则在弹性力学里加以研究。同时，对于杆状构件作进一步的、精确的分析，也须用到弹性力学。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件，然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外，为了简化数学推导，大都还引用一些关于构件的形变状态或应力分布的假定，因而得出的解答有时只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件，一般都不必引

用那些假定，因而得出的解答就比较精确，并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

例如，在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下的弯曲，就引用了平面截面的假定，得出的结果是：横截面上的正应力(弯应力)按直线分布。在弹性力学里研究这同一问题，就无须引用平面截面的假定。相反地，还可以用弹性力学里的分析结果来校核这个假定是否正确，并且由此判明：如果梁的高度并不远小于梁的跨度，而两者是同等大小的，那么，横截面上的正应力并不按直线分布，而显然是按曲线变化的，如图 7-7 所示，并且，材料力学里给出的最大正应力将具有成倍的误差。

又例如，在材料力学里计算有孔的拉伸构件，通常就假定拉应力在净截面上均匀分布。弹性力学里的计算结果表明：净截面上的拉应力远不是均匀分布，面在孔的附近发生高度的应力集中，如图 4-10 所示，孔边的最大拉应力会比平均拉应力大出几倍。

弹性力学可以分为数学弹性力学和实用弹性力学两部分。在数学弹性力学里，只用精确的数学推演而不引用关于形变状态或应力分布的假定。本书上册的内容属于数学弹性力学。在实用弹性力学里，和在材料力学里一样，则引用形变状态或应力分布的假定来简化数学推演，得出具有一定近似性的解答。这样，按照分析的方法和解答的精度说来，实用弹性力学是接近材料力学的；但是，由于其中所研究的问题比较复杂，同时还要用到数学弹性力学中的结果，所以这些研究内容归入弹性力学。本书下册的内容就属于实用弹性力学。

从本世纪的三十年代开始，不少的建筑工作者和力学工作者曾经致力于弹性力学和结构力学的综合应用，使得这两门学科越来越密切结合。弹性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析法以后，大大扩展了它的应用范围，使得一些比较复杂的问题，本来是无法求解的，得到了解答。这些解答虽然在理论上具有一定的

近似性，但应用在工程上，却是足够精确的。在最近十几年间快速发展起来的有限单元法中，把连续弹性体划分成为有限大小的单元构件，然后用结构力学中的位移法、力法或混合法求解，更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外，对于同一结构的各个构件，甚至对于同一构件的不同部分，分别用弹性力学和结构力学或材料力学进行计算，常常可以节省很大的工作量，而仍然得到令人满意的结果。在水工建筑上，这种例子特别多。

总之，建筑力学中三门学科之间的界线不是很明显的，更不是一成不变的。我们不应当强调它们之间的分工，而应当多多发挥它们综合应用的威力，才能使建筑力学更好地为建筑工程服务。

关于有限单元法的原理和应用，国内外已有很多的专著进行详细阐述，本书不拟进行介绍。但是，对于用有限单元法计算弹性力学问题时所需用的一些知识，本书将在适当的章节中加以较详细的讨论。

§ 1-2　弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。这些概念，虽然在材料力学和结构力学里都已经用到过，但在这里仍有再加以详细说明的必要。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力，两者也分别简称为体力和面力。

所谓体力，是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。物体内各点受体力的情况，一般是不相同的。为了表明该物体在某一点 P 所受体力的大小和方向，在这一点取物体的一小部分，它包含着 P 点而它的体积为 ΔV，图 1-1 a。设作用于 ΔV 的体力为 $\Delta \boldsymbol{Q}$，则体力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V$。如果把所取的那一小部分物体不断减小，即 ΔV 不断减小，则 $\Delta \boldsymbol{Q}$ 和 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V$ 都将不断地改变

大小、方向和作用点。现在,命 ΔV 无限减小而趋于 P 点,假定体力为连续分布,则 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V$ 将趋于一定的极限 F,即

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta V} = \boldsymbol{F}。$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{F}$,就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是标量,所以 $\boldsymbol{F}$ 的方向就是 $\Delta \boldsymbol{Q}$ 的极限方向。矢量 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影 X、Y、Z,称为该物体在 P 点的体力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的因次是[力][长度]$^{-3}$。

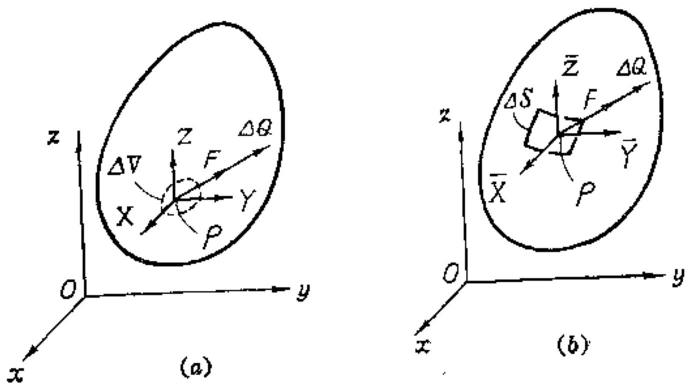

图 1-1

所谓面力,是分布在物体表面上的力,例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受面力的情况,一般也是不相同的。为了表明该物体在其表面上某一点 P 所受面力的大小和方向,在这一点取该物体表面的一小部分,它包含着 P 点而它的面积为 ΔS,图 1-1 b。设作用于 ΔS 的面力为 $\Delta \boldsymbol{Q}$,则面力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta S$。与上相似,命 ΔS 无限减小而趋于 P 点,假定面力为连续分布,则 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta S$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{F}$,即

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta S}=\boldsymbol{F}。$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{F}$ 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为ΔS是标量，所以 $\boldsymbol{F}$ 的方向就是 $\Delta\boldsymbol{Q}$ 的极限方向。矢量 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影 $\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$，称为该物体在 P 点的面力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。它们的因次是［力］［长度］$^{-2}$。

物体受了外力的作用，或由于温度有所改变，其内部将发生内力。为了研究物体在其某一点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分，而将 B 部分撇开，图1-2。撇开的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力。取这一截面的一小部分，它包含着 P 点而它的面积为 ΔA。设作用于 ΔA 上的内力为$\Delta\boldsymbol{Q}$，则内力的平均集度，即平均应力为 $\Delta\boldsymbol{Q}/\Delta A$。现在，命 ΔA 无限减小而趋于 P 点，假定内力为连续分布，则 $\Delta\boldsymbol{Q}/\Delta A$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{S}$，即

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A}=\boldsymbol{S}。$$

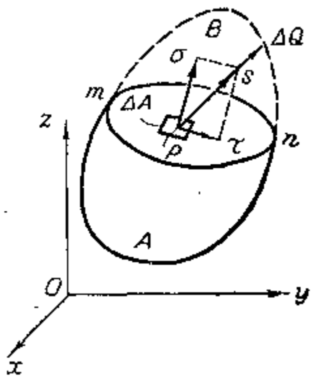

图 1-2

这个极限矢量$\boldsymbol{S}$就是物体在截面 mn 上的、在 P 点的应力。因为 ΔA 是标量，所以应力 $\boldsymbol{S}$ 的方向就是 $\Delta\boldsymbol{Q}$ 的极限方向。

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量和物体的形变或材料强度都没有直接的关系。与物体的形变及材料强度直接相关的，是应力在其作用截面的法向和切向的分量，也就是正应力 σ 和剪应力 τ，

图 1-2 。应力及其分量的因次也是[力][长度]$^{-2}$。

显然可见，在物体内的同一点 P，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度为 $PA=\Delta x$、$PB=\Delta y$、$PC=\Delta z$，图 1-3。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个坐标角码。例如，正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上，同时也是沿着 x 轴的方向作用的。剪应力用 τ 表示，并加上两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，剪应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上面沿着 y 轴方向作用的。

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为一个正面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个截面上的外法线是

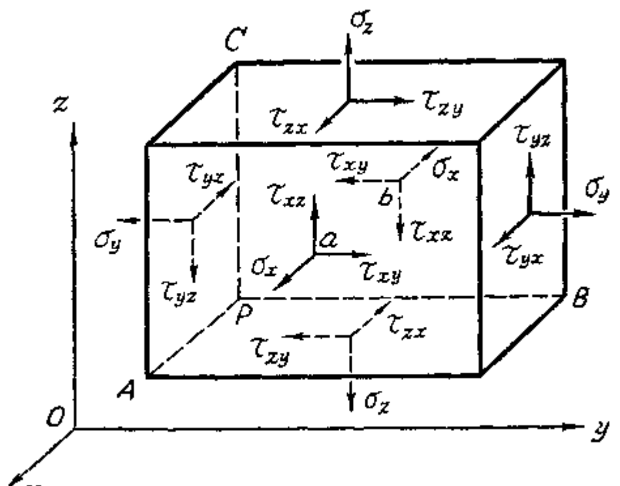

图 1-3

沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为一个负面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图上所示的应力分量全部都是正的。注意，虽然上述正负号规定，对于正应力说来，结果是和材料力学中的规定相同(拉应力为正而压应力为负)，但是，对于剪应力说来，结果却和材料力学中的规定不完全相同。

六个剪应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接前后两面中心的直线 ab 为矩轴，立出力矩平衡方程，得到

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2}-2\tau_{zy}\Delta y\Delta x\frac{\Delta z}{2}=0。$$

同样可以立出其余两个相似的方程。简化以后，得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}。\tag{1-1}$$

这就证明了剪应力的互等关系：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力，是互等的（大小相等，正负号也相同)。因此，剪应力记号的两个角码可以对调。

在这里，我们没有考虑应力由于位置不同而产生的改变(也就是把六面体中的应力当做均匀应力)，而且也没有考虑体力的作用。以后可见，即使考虑到应力随位置不同而产生的改变和体力的作用，仍然可以推导出剪应力的互等关系。

顺便指出，如果采用材料力学中的正负号规定，则剪应力的互等关系将成为

$$\tau_{yz}=-\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=-\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=-\tau_{yx}。$$

显然不如采用上述规定时来得简单。但也应当指出，在利用莫尔圆(即应力圆)时，就必须采用材料力学中的规定。 τ_{yy}

以后可见，在物体的任意一点，如果已知 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{yz}、τ_{zx}、τ_{xy} 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力。因此，上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

所谓形变，就是形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此，物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点P的形变状态，在这一点沿着坐标轴x、y、z的正方向取三个微小的线段PA、PB、PC，图1-3。物体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩，称为正应变；各线段之间的直角的改变，用弧度表示，称为剪应变。正应变用字母ε表示：ε_x表示x方向的线段PA的正应变，余类推。正应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相适应。剪应变用字母γ表示：γ_{yz}表示y与z两方向的线段（即PB与PC）之间的直角的改变，余类推。剪应变以直角变小时为正，变大时为负，与剪应力的正负号规定相适应。正应变和剪应变都是无因次的数量。

以后可见，在物体的任意一点，如果已知ε_x、ε_y、ε_z、γ_{yz}、γ_{zx}、γ_{xy}这六个应变，就可以求得经过该点的任一线段的正应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此，这六个应变，称为该点的形变分量，可以完全确定该点的形变状态。

所谓位移，就是位置的移动。物体内任意一点的位移，用它在x、y、z三轴上的投影u、v、w来表示，以沿坐标轴正方向的为正，沿坐标轴负方向的为负。这三个投影称为该点的位移分量。位移及其分量的因次是[长度]。

一般而论，弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量，都是随着该点的位置而变的，因而都是位置坐标的函数。

在弹性力学的问题里，通常是已知物体的形状和大小（即已知物体的边界），已知物体的弹性常数，物体所受的体力，物体边界上的约束情况或面力，须要求解应力分量、形变分量和位移分量。

§1-3　弹性力学中的基本假定

为了由弹性力学问题中的已知量求出未知量，必须建立这些已知量与未知量之间的关系，以及各个未知量之间的关系，从而导出一套求解的方程。在导出方程时，可以从三方面来进行分析。一方面是静力学方面，由此建立应力、体力、面力之间的关系。另一方面是几何学方面，由此建立形变、位移和边界位移之间的关系。再一个方面是物理学方面，由此建立形变与应力之间的关系。

在导出方程时，如果精确考虑所有各方面的因素，则导出的方程非常复杂，实际上不可能求解。因此，通常必须按照研究对象的性质，联系求解问题的范围，作出若干基本假定，从而略去一些暂不考虑的因素，使得方程的求解成为可能。在本教程中，除了个别的章节以外，都采用如下的基本假定。

(1) 假定物体是连续的，也就是假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。这样，物体内的一些物理量，例如应力、形变、位移等等，才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。实际上，一切物体都是由微粒组成的，都不能符合上述假定。但是，可以想见，只要微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离都比物体的尺寸小得很多，那么，关于物体连续性的假定，就不会引起显著的误差。

(2) 假定物体是完全弹性的，也就是假定物体服从虎克定律——应变与引起该应变的应力成比例；反映这种比例关系的常数，即所谓弹性常数，并不随应力或应变的大小和符号而变。具体地讲，当应力增大到若干倍时，应变也增大到同一倍数；当应力减小到若干分之一时，应变也减小到同一分数；当应力减小为零时，应变也减小为零(没有任何剩余形变)；当应力反其符号时，应变也反其符号，而且两者仍然保持其同样的比例关系。由材料力学已知：脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，可以认为是近似的