手中宝

CHUZHONG SHUXUE JIETI FANGFA SHOUCE

初中数学解题方法手册

广西教育出版社

手中宝贝
伴读老师

手中宝

总策划 · 黄力平
责任编辑 · 黄曼 · 责任校对 · 杨红斌 · 何云
封面设计 · 梁伟琪

《小学古诗手册》
《小学词语手册》
《小学成语手册》
《小学同义词造句手册》
《小学反义词造句手册》
《小学数学手册》
《小学病句手册》
《小学数学解题方法手册》
《小学笔顺造句手册》

《高中语文手册》
《高中英语手册》
《高中数学手册》
《高中物理手册》
《高中化学手册》
《高中生物手册》
《高中历史手册》
《高中地理手册》

《高中物理实验手册》
《高中化学实验手册》
《高中生物实验手册》

《高中数学解题方法手册》
《高中物理解题方法手册》
《高中化学解题方法手册》

《初中语文手册》
《初中英语手册》
《初中数学手册》
《初中物理手册》
《初中化学手册》
《初中生物手册》
《初中历史手册》
《初中地理手册》

《初中物理实验手册》
《初中化学实验手册》
《初中生物实验手册》

《初中数学解题方法手册》
《初中物理解题方法手册》
《初中化学解题方法手册》

《中学名句默写手册》

《格言谚语歇后语手册》
《经典寓言故事手册》
《经典神话传说故事手册》
《经典典故故事手册》
《趣味谜语对联手册》

ISBN 7-5435-4417-2
9 787543 544178 >

ISBN 7-5435-4417-2/G · 3467
定价:10.00 元

手中宝

手中宝贝 伴读老师

曾晓新 张玉林 编著

CHUZHONG SHUXUE JIETI FANGFA SHOUCE

初中数学解题方法手册

广西教育出版社

手中宝
初中数学解题方法手册
曾晓新　张玉林　编著
☆
广西教育出版社出版
南宁市鲤湾路8号
邮政编码:530022　电话:5850219
全国新华书店经销　广西民族印刷厂印刷
*
开本 890×1240　1/64　6.625印张　229千字
2006年2月第1版　2006年2月第1次印刷
印数：1—5 000册
ISBN 7-5435-4417-2/G·3467　定价:10.00元

前言

数学的思想方法是数学的灵魂，数学解题方法是数学思想方法的重要和基本的组成部分，本书就介绍了初中（7～9 年级）数学中常用的解题方法．通过本书，读者可以多角度地、比较完整地、系统地了解和掌握初中数学常用的解题方法，也便于读者在初中数学教学或学习中使用．

本书既是一本工具书，教师和学生可以从中查阅各种解题方法及其运用的范例，也是一本教学和学习参考书，当需要对初中数学的解题方法进行教学或学习，或者比较系统地复习时，本书可以提供很好的、比较完整的参考，甚至可以直接作为初中数学复习或竞赛培训的提纲．

本书重在解题思路的分析与解题方法的运用，力求深入浅出、通俗易懂．对于初中数学基本题型解题方法，主要是按题型介绍，把每种基本题型常用的解题方法，各种方法如何运用等，通过一些典型例题展现给读者．对于初中数学的一般解题方法，则是以解题方法为主线，分别介绍每种解题方法的主要特点和解题思路，然后分门别类举例说明各种解题方法在不同问题情境中的应用．

本书以“义务教育阶段国家数学课程标准（7～9 年级）”为主要依据，同时略有拓展与提高，以保证系统性与完整性，满足不同层次读者的实际需要．

曾晓新　张玉林

目录

一、初中代数基本题型常用解题方法

（一）数值运算技巧

1. 巧用运算定律

数值的运算定律主要有加法的交换律、结合律，乘法的交换律、结合律，乘法对加法的分配律，等等. 巧用运算定律可以帮助我们比较简便地进行运算.

例 1 计算$\left(-\frac{1}{30}\right)\div\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)$.

解法 1 按混合运算的顺序，先算括号内，再算括号外；计算括号内时，先将其中的分数按分母分成比较容易直接求和的两组，再计算.

$$\begin{aligned}原式&=\left(-\frac{1}{30}\right)\div\left[\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}\right)\right]\\&=\left(-\frac{1}{30}\right)\div\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)\\&=\left(-\frac{1}{30}\right)\div\frac{1}{3}\\&=\left(-\frac{1}{30}\right)\times3\\&=-\frac{1}{10}.\end{aligned}$$

解法 2 先计算原式的倒数，化除为乘，再利用分配律来简化运算，最后将所得结果颠倒.

原式的倒数为

$$\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)\div\left(-\frac{1}{30}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)\times(-30)$$
$$=-5+3-20+12$$
$$=-10.$$

$\therefore$ 原式$=-\frac{1}{10}$.

【说明】 解法 2 比解法 1 要简捷.

例 2 计算$(-25)\left(-\frac{7}{12}\right)(-2)(-4)\left(-5\frac{1}{7}\right)\times 5$.

解 首先确定整个积的符号，然后利用乘法的交换律与结合律，将容易求积的数分别相乘.

$$原式=-\left(25\times\frac{7}{12}\times 2\times 4\times\frac{36}{7}\times 5\right)$$
$$=-(25\times 4)(2\times 5)\left(\frac{7}{12}\times\frac{36}{7}\right)$$
$$=-100\times 10\times 3$$
$$=-3000.$$

【说明】 几个数相乘，首先确定整个积的符号，这样比较简便，又不容易出错.

2. 适当搭配

根据算式的特点将算式重新进行组合，以方便运算.

例 3 计算 $1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11-12+13+14-15$.

解法 1 尽可能分成和为零的几组来进行计算.

$$原式=(1+2-3)+(-4+5+6-7)+(-8+9+10-11)+(-12+13+14-15)$$

$=0+0+0+0=0.$

解法 2 添一个(−16)，再加一个 16，把原式变成和为−4 的四组与 16 的和.

$$\begin{aligned}原式&=(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+(9+10-11-12)+(13+14-15-16)+16\\&=-4-4-4-4+16=0.\end{aligned}$$

3. 凑整

把接近整十、整百、整千……的数凑成整十、整百、整千……来运算.

例 4 计算 $5991+599.1+59.91+5.991.$

解
$$\begin{aligned}原式&=(6000-9)+(600-0.9)+(60-0.09)+(6-0.009)\\&=6666-9.999\\&=6666-10+0.001=6656.001.\end{aligned}$$

4. 分解因数

在很多情况下，算式中的数要经过因数分解才能看出规律.

例 5 计算 $1987\times19861986-1986\times19871987.$

解
$$\begin{aligned}原式&=1987\times1986\times10001-1986\times1987\times10001\\&=0.\end{aligned}$$

例 6 化简 $\sqrt{\dfrac{1\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot6+\cdots+n\cdot2n\cdot3n}{1\cdot5\cdot10+2\cdot10\cdot20+\cdots+n\cdot5n\cdot10n}}.$

解
$$\begin{aligned}原式&=\sqrt{\frac{1\cdot2\cdot3(1^3+2^3+\cdots+n^3)}{1\cdot5\cdot10(1^3+2^3+\cdots+n^3)}}\\&=\sqrt{\frac{3}{5^2}}=\frac{\sqrt{3}}{5}.\end{aligned}$$

5. 运用公式

在数值运算过程中直接套用一些基本公式来简化运算. 请参看本书 197 页“公式法”中的“数值运算”.

6. 进行代换

用字母对算式中的某些数值进行替换，以简化运算.

例 7 计算

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2002}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2001}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2002}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2001}\right).$$

解 令 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2001}=A$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left(A-1+\frac{1}{2002}\right)A-\left(A+\frac{1}{2002}\right)(A-1)\\&=A^2-A+\frac{1}{2002}\cdot A-\left(A^2-A+\frac{1}{2002}\cdot A-\frac{1}{2002}\right)\\&=\frac{1}{2002}.\end{aligned}$$

例 8 计算 $\frac{19470815}{630030^2-630029\times630031}$.

解 令 $630030=a$，则

$$\begin{aligned}\text{原式分母}&=a^2-(a-1)(a+1)\\&=a^2-(a^2-1)=1.\end{aligned}$$

$\therefore$ 原式 $=19470815$.

7. 放大缩小

将算式中的某些数值适当地放大或缩小，以确定原算式的取值范围，这对于某些问题的处理是十分必

要的.

例 9 设$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$的整数部分是 a，小数部分是 b，求 $a^2+(1+\sqrt{7})ab$ 的值.

解 解答本例的关键在于确定$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$介于哪两个连续整数之间.

$$\frac{1}{3-\sqrt{7}}=\frac{3+\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\frac{3+\sqrt{7}}{2}.$$

又 $2=\dfrac{3+\sqrt{1}}{2}<\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}<\dfrac{3+\sqrt{9}}{2}=3$，

可见$\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\left(即\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}\right)$介于 2 与 3 之间，2 即其整数部分，减 2 后所余的即其小数部分.

$\therefore\quad a=2,\ b=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}-2=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}.$

$$\begin{aligned}a^2+(1+\sqrt{7})ab&=2^2+(1+\sqrt{7})\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{7}-1}{2}\\&=4+(7-1)=10.\end{aligned}$$

【说明】 把 7 缩小为 1，就得

$$2=\frac{3+\sqrt{1}}{2}<\frac{3+\sqrt{7}}{2}.$$

把 7 放大为 9，又得

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2}<\frac{3+\sqrt{9}}{2}=3.$$

(二) 因式分解常用基本方法

把一个多项式化成几个整式的乘积的形式，叫做多项式的因式分解. 多项式因式分解常用的基本方法有：提取公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法、换元法、待定系数法. 常用的技巧有：拆项与添加项.

因式分解的一般思路是："一提、二代、三分组、四十字相乘". 也就是说，首先考虑是否有公因式可提，若有公因式，先提取公因式；其次考虑是否可以套公式，用公式法分解；再考虑是否可以分组分解；对二次三项式或准二次三项式，还可以考虑用十字相乘法分解.

实际分解时，往往几种方法混合使用.

1. 提取公因式法

一个多项式，如果各项都含有公共的因式，就可以把这个公因式提出来，作为整个多项式的因式.

例 1 把 $12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2$ 分解因式.

解 所给多项式各项系数分别是 12，6，-15，其最大公约数是 3，各项都还含有字母因子 a 和 x^2，所以各项具有公因式 $3ax^2$，可以提出来作为整个多项式的因式.

原式$=3ax^2(4ax+2by-5c)$.

【说明】 提取公因式有个原则，叫"一次提净". 也就是说，各项若有公因式，应该尽可能一次全部提出来.

例 2 把$-3ab(2x+3y)^3+ac(2x+3y)^2-a(2x+3y)$分解因式.

解 原式$=-a(2x+3y)[3b(2x+3y)^2-c(2x+3y)+1]$.

【说明】 本例有以下几点需要注意:

(1) 公因式既可以是数字和字母，也可以是由若干字母组合成的代数式.

(2) 提取公因式后余下的部分，首项系数最好是正的，因此本例多提了一个负号（其实是-1)，提出负号后所有项都要变号.

(3) 原式中的最后一项全部提出来了，所余位置上还应该有个 1，千万别忘了!

2. 公式法

公式法又叫代公式法，就是直接运用乘法公式进行因式分解. 常用的公式有:

平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

完全平方公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

立方和公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

立方差公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

例 3 把 $9(m-n)^2-4(m+n)^2$ 分解因式.

解 所给多项式符合平方差的结构特征,用平方差公式分解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=[3(m-n)]^2-[2(m+n)]^2\\
&=[3(m-n)+2(m+n)][3(m-n)-2(m+n)]\\
&=(5m-n)(m-5n).
\end{aligned}
$$

例 4 把 a^6-b^6 分解因式.

解法 1 把六次方看作立方的平方，从平方差入手进行分解.

$$
\begin{aligned}
&a^6-b^6\\
&=(a^3)^2-(b^3)^2\\
&=(a^3+b^3)(a^3-b^3)\\
&=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)\\
&=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).
\end{aligned}
$$

解法 2 把六次方看作平方的立方，从立方差入手进行分解.

$$
\begin{aligned}
&a^6-b^6\\
&=(a^2)^3-(a^2)^3\\
&=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)\\
&=(a+b)(a-b)[(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2]\\
&=(a+b)(a-b)[(a^2+b^2)^2-(ab)^2]\\
&=(a+b)(a-b)(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)\\
&=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).
\end{aligned}
$$

【说明】 相比之下，解法 1 比较简便，解法 2 最容易在因式 $a^4+a^2b^2+b^4$ 处停止. 由于 a^2+ab+b^2 在实数范围内不能再分解，很多人就误认为$a^4+a^2b^2+b^4$ 也不能再分解了. 事实上，通过适当“配方”，$a^4+a^2b^2+b^4$ 还是可以化为平方差继续分解的. 这也告诉我们：有些看上去似乎不符合公式结构特征的代数式，经过变形可以化成符合公式结构特征的多项式，从而可以用公式法分解.

3. 分组分解法

分组分解法一般有三步. 第一步，将所给多项式中的各项适当分组；第二步，对所分各组用“提取公因式法”或“代公式法”分别处理；第三步，将经过处理后的各组分别当作一项，再用“提取公因式法”或“代公式法”.

例 5 分解因式 $ax-by-bx+ay$.

解法 1 把两个含 x 的项做一组，两个含 y 的项做另一组，分别提取 x，y 之后，两组产生公因式 $a-b$.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (ax-bx)+(ay-by) \\
&= x(a-b)+y(a-b) \\
&= (a-b)(x+y).
\end{aligned}
$$

解法 2 把两个含 a 的项做一组，两个含 b 的项做另一组，分别提取 a，b 之后，两组产生公因式 $x+y$.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (ax+ay)-(bx+by) \\
&= a(x+y)-b(x+y) \\
&= (x+y)(a-b).
\end{aligned}
$$

【说明】 分组的方式往往不惟一，有多种可能.

例 6 把 $4x^3-8x^2-x+2$ 分解因式.

解法 1 原式是四项式，既无公因式可提，也无法直接套公式，因而考虑分组分解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (4x^3-8x^2)-(x-2) \\
&= 4x^2(x-2)-(x-2) \\
&= (x-2)(4x^2-1) \\
&= (x-2)[(2x)^2-1^2] \\
&= (x-2)(2x+1)(2x-1).
\end{aligned}
$$