研究生用书

有限单元法

秦太验　周 喆　徐春晖　编著

中国农业科学技术出版社

研究生用书

有限单元法

秦太验　周 喆　徐春晖　编著

中国农业科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法/秦太验,周喆,徐春晖编著.—北京:中国农业科学技术出版社,2006.2

ISBN 7-80167-907-5

Ⅰ.有… Ⅱ.①秦… ②周… ③徐… Ⅲ.有限单元法 Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第160150号

责任编辑	闫庆健
责任校对	马丽萍
出版发行	中国农业科学技术出版社 (北京市海淀区中关村南大街12号 邮编:100081 电话:010-62187620)
经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　　本	787mm×1092mm 1/16 印张:13.75
印　　数	1~800册 字数:328千字
版　　次	2006年2月第1版 2006年2月第1次印刷
定　　价	18.00元

前　言

在工程和科学技术各个领域内，对于许多力学、物理等问题，人们已经找到了它们应遵循的基本方程（常微分方程或偏微分方程）和相应的定解条件。但能用解析方法求出精确解的只是少数方程性质比较简单，且几何形状相当规则的问题。对于大多数问题，由于方程或求解区域的几何形状比较复杂，而很难得到解析的答案，这类问题的解决通常有两种途径：一种是引入简化假定，将方程和几何边界简化为能够处理的情况，从而得到问题在简化情况下的解答，这种方法对于很多复杂问题是不可行的，因为过多的简化可能导致误差很大甚至错误的解答。另一种解决途径和方法则是近年来得到突飞猛进发展的数值解法，特别是近三十多年来，随着计算机技术的飞速发展和广泛应用，数值方法已成为求解工程和科学技术问题的主要工具。

数值分析方法主要分两大类。一类以有限差分法为代表，其特点是直接求解基本微分方程和相应的定解条件的近似解。借助于有限差分法，能够求解某些相当复杂的问题，特别是求解流体流动问题，差分法有自己的优势。但用于求解几何形状复杂的结构时，它的精度将降低，甚至发生困难。另一类是首先建立和原问题基本方程及定解条件相等效的积分提法，进而建立近似解法，如最小二乘法、里兹法、伽辽金法等都属于这一类数值方法。由于这几种方法都是在全求解区域上假设近似函数，因此对于几何形状复杂的问题，不可能建立合乎要求的近似函数。而有限元法的出现，是数值分析方法研究领域内的重大突破性进展。利用变分原理建立的有限元方程和经典的里兹法的主要区别是，有限单元法假设的近似函数不是定义在全求解区域而是在单元上，而且事先不要求满足任何边界条件，因此它可以用来处理复杂的连续介质问题。

有限元法是一种工程数值计算方法，其适应性很强，可以解决各种各样的复杂工程问题。有限元法的基本思想就是将任意一个连续体离散化为一组有限个、按一定方式互相联结且几何形状简单的单元的组合，单元本身又可以有不同形状，使复杂问题简化从而得到问题的解。有限元法作为数值分析方法的另一个重要特点是利用在每一个单元内假定的近似函数来分片地表示全求解区域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数，或这些函数与其导数在单元各个节点上的数值和其插值函数来表达。这样一来，未知场函数或未知场函数及其导数在各个节点上的数值就成为新的未知量（即自由度），从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题，一经求解出这些未知量，就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得

到整个求解域上的近似解。显然随着单元数目的增加,即单元尺寸的缩小,解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的,近似解最后将收敛于精确解。

从应用数学角度看,有限元法基本思想的提出,可以追溯出 Courant 在 1943 年的工作,他对 Ritz 法作了重要的推广,在划分为许多三角形的区域上引进分片试探函数,将各三角形区域相互联结处的函数值取为问题的未知量。由于当时尚未出现计算机,他的思想没有结出丰硕果实。1960 年,Clough 首次提出了"有限单元法"这个词,使人们更清楚地认识到有限元法的功效。有限单元法的最大特点是适应性强,它可以把形状不同、性质不同的单元组集起来求解,所以特别适用于求解不同构件组合成的复杂结构。1960 年以后,伴随着电子计算机的快速发展和广泛应用,有限元法的发展速度才显著加快,已被广泛应用于几乎所有的工程技术领域。

有限元法在现代农业科技的各个领域也得到越来越广泛的应用。农业方面有限元法早期的应用主要是有关农业机械强度计算方面。近一二十年来,有限元法在农产品和食品的加工方法、蔬菜和水果的损伤防护、水分及其溶质在土壤和植物体内的运动、农业环境保护以及作物生长过程等方面都得到了应用。

本书是在黄文彬教授编写的《有限元法基础》讲义的基础上修订、扩充而完成的。书中提供的有限元教学程序 FEMED 是在李明瑞教授编写的有限元教学程序 FEP2 的基础上修改而成的。

本书的特点是由浅入深地阐述了有限元法的基本理论,精选了大量例题,通过这些例题,使学生逐步掌握有限元法的基本理论和方法。内容包括有限元法的理论基础——加权余量法、杆系结构、平面弹性问题、空间弹性问题、热传导问题、流体力学问题、动力学问题、板壳问题以及有限元程序设计等。本书可作为工科院校有关专业研究生和本科生的教材,也可作为有关专业教师和工程技术人员的参考用书。

本书的第一章至第五章由秦太验教授编写,第六章至第七章由徐春晖副教授编写,第八章至第十章由周喆副教授编写。

黄文彬教授和华云龙教授对全书作了全面审阅,提出了许多宝贵意见。在此特别向黄文彬教授、李明瑞教授和华云龙教授表示衷心的感谢。

本书编写过程中,常天春、栗文彬、张玉、单瑞芹、杨惠玲、李烨等同志做了许多编辑工作。作者在此向他们表示感谢。

本书的出版得到了中国农业大学研究生院的资助,同时也得到了中国农业科学技术出版社的大力支持。责任编辑闫庆健主任悉心完成了本书的审阅和编辑。作者向他们表示由衷的谢意。

由于水平所限,本书肯定存在不足和不妥之处,欢迎同行专家和读者批评和指正。

作　者
2005 年 12 月

内容简介

本书系统地阐述了有限单元法的基本原理、数值方法、计算机程序设计技术及其应用。

全书共10章,内容包括有限元法的理论基础——加权余量法、杆系结构、平面弹性问题、空间弹性问题、热传导问题、流体力学问题、动力学问题及板壳问题等,重点是有限元法的基本原理及数学公式表达的建立,以及单元插值函数的构造。最后以一个线弹性静力学教学程序 **FEMED** 为例介绍了有限元程序设计,简要介绍有限元程序设计技术,使读者初步掌握有限元编程的基本方法和通用程序开发能力。

本书的特点是由浅入深,简明易懂。书中精选了大量例题,通过这些例题,使学生逐步掌握有限元法的基本理论和方法,特别适合于教学学时偏少的情况。

本书可作为高等院校力学、机械、土木、水利、航空航天等专业本科生和研究生的教材,也可作为其他相关专业科技人员的参考书。

目　录

1　有限元法预备知识——加权余量法 …… (1)
1.1　变分问题的加权余量法 …… (1)
1.2　弹性力学的变分原理——虚功原理 …… (7)
小结 …… (8)
习题 …… (9)
2　杆系结构有限元法 …… (10)
2.1　杆单元、平面桁架有限元法 …… (10)
2.2　平面梁单元 …… (19)
2.3　平面刚架有限元法 …… (33)
2.4　空间桁架 …… (39)
2.5　空间刚架 …… (42)
小结 …… (51)
习题 …… (52)
3　弹性平面问题有限元法 …… (55)
3.1　弹性平面问题的基本公式 …… (55)
3.2　三节点三角形单元 …… (56)
3.3　四节点矩形单元 …… (61)
3.4　多节点单元的形函数 …… (66)
3.5　用面积坐标表示三角形单元的形函数 …… (72)
3.6　等效节点载荷 …… (76)
小结 …… (77)
习题 …… (77)
4　平面等参单元 …… (80)
4.1　等参单元的概念 …… (80)
4.2　等参单元的收敛性研究 …… (83)
4.3　等参变换的雅可比矩阵 …… (84)
4.4　等参单元的单刚和等效外载 …… (87)

4.5 Wilson 元 …… (91)
4.6 三角形单元的等参变换 …… (96)
4.7 高斯数值积分 …… (97)
小结 …… (102)
习题 …… (103)

5 弹性空间问题有限元分析 …… (104)
5.1 空间轴对称问题 …… (104)
5.2 空间四面体单元 …… (108)
5.3 空间等参单元 …… (110)
小结 …… (118)
习题 …… (119)

6 热传导问题的有限单元法 …… (120)
6.1 热传导问题基本方程 …… (120)
6.2 二维稳态热传导问题 …… (122)
6.3 二维瞬态热传导问题 …… (127)
6.4 温度应力计算 …… (130)
小结 …… (131)
习题 …… (131)

7 流体力学问题的有限单元法 …… (133)
7.1 流体力学基本知识 …… (133)
7.2 稳定渗流基本方程及其离散化 …… (134)
7.3 二维不可压理想流体无旋流动 …… (137)
小结 …… (141)
习题 …… (142)

8 动力学问题的有限单元法 …… (143)
8.1 引言 …… (143)
8.2 弹性动力学基本方程 …… (143)
8.3 质量矩阵和阻尼矩阵 …… (144)
8.4 直接积分法 …… (146)
8.5 振型叠加法 …… (150)
8.6 阶梯形杆的固有频率和动力响应 …… (153)

小结 …………………………………………………………………………………… (155)
习题 …………………………………………………………………………………… (155)

9　板壳结构的有限元法 ………………………………………………………… (156)
9.1　引言 ………………………………………………………………………………… (156)
9.2　薄板理论 …………………………………………………………………………… (156)
9.3　*Kirchhoff* 板单元 ……………………………………………………………… (160)
9.4　*Mindlin* 板单元 ………………………………………………………………… (163)
9.5　平板壳单元 ………………………………………………………………………… (166)
小结 …………………………………………………………………………………… (168)
习题 …………………………………………………………………………………… (168)

10　有限元程序设计 ……………………………………………………………… (169)
10.1　有限元程序的基本结构 ………………………………………………………… (169)
10.2　数组的半动态分配 ……………………………………………………………… (170)
10.3　构造单元刚度矩阵及总刚度矩阵的组集 ……………………………………… (171)
10.4　总刚度矩阵的变带宽存储 ……………………………………………………… (172)
10.5　给定位移约束的处理 …………………………………………………………… (174)
10.6　单元应力及节点力的计算 ……………………………………………………… (176)
10.7　FEMED 程序 ……………………………………………………………………… (176)
10.8　算例 ……………………………………………………………………………… (196)
10.9　FEMED 程序索引 ………………………………………………………………… (204)
小结 …………………………………………………………………………………… (206)
习题 …………………………………………………………………………………… (207)

参考文献 ………………………………………………………………………… (208)

1 有限元法预备知识——加权余量法

在工程领域内，对于许多力学问题和物理问题，人们都可以给出其数学模型，即应遵循的基本方程（微分方程）和相应的定解条件。但能用解析方法求出精确解的只是极少数比较简单的情况，对于大多数问题，由于方程的非线性性质或求解域的几何形状比较复杂，则只能采用数值方法求解。随着计算机技术的飞速发展和广泛应用，数值分析方法已成为求解工程实际问题的功能强大的有力工具。

变分原理是有限元法的理论基础，分片插值则是构造有限元法的思想核心。

1.1 变分问题的加权余量法

1.1.1 泛函及变分的定义

积分描述法的基本概念是泛函。泛函也是一种"函数"，但它是一种比通常所说的函数有更深内涵的"函数"，这种函数的独立变量一般不是通常函数的自变量，而是通常函数本身。这种以函数作为它的独立变量的"函数"称为泛函。为了说明这种泛函的集体含义，现举三个实例。

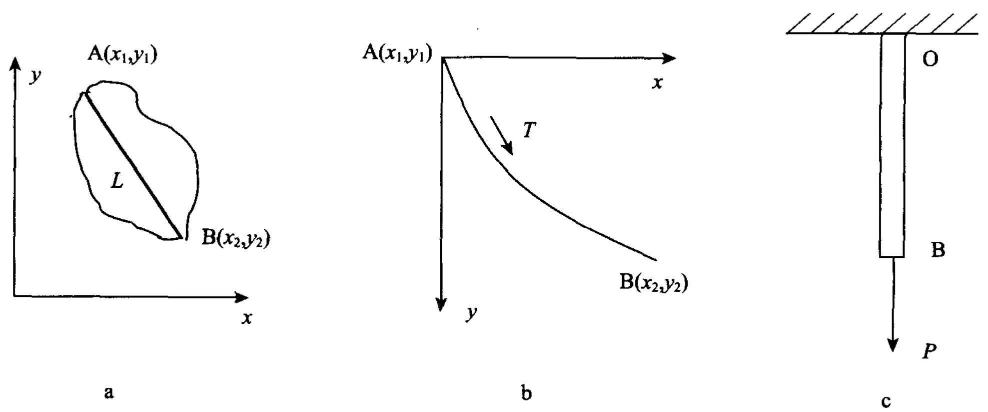

图 1-1 泛函实例

例题 1.1 如图 1-1(a)所示，在 xy 平面上，AB 两个定点间可以连接出很多条曲线 $y=y(x)$，x 是自变量，y 是独立函数。曲线的长度 L 是随不同的曲线 y 而变的，所以 L 是 y 的"函数"，而 y 又是自变量 x 的函数，所以 L 是一个泛函。由于曲线长度是弧长的积分，所以上述泛函 $L[y]$ 为：

$$L[y] = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathrm{d}s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

这是一种积分描述法。

例题 1.2 如图 1-1(b)所示，假设在 AB 两定点连成的曲线上有一质点，此质点在重力的作用下，无摩擦地从 A 滑到 B 需要一定的时间 T。T 是随不同的曲线 $y(x)$ 而变的，所以，

T 是 y 的“函数”，即 $T=T[y]$，而 y 又是自变量 x 的函数，所以 T 是一个泛函。

设 A 在原点，故质点由 A 滑行到 B 的速度 v 可用 $v=\sqrt{2gy}$ 表示。则滑行弧段长 ds 所需的时间 dT 可用下式表示：

$$dT=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \tag{1.2}$$

故需要的总时间 $T[y]$ 这样一个泛函为：

$$T[y]=\int_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx \tag{1.3}$$

这也是一种积分描述法。

例题 1.3　如图 1-1(c)所示。假设有一根不计自重的弹性杆 OB，长度为 l，断面积为 A，弹性模量为 E，O 端固定在原点，x 轴沿杆的轴线向下，B 端受拉力 p 作用，杆内各点会产生随 x 变化的位移 $u(x)$，因而产生应变 ε 和应力 σ。在线弹性范围内，定义杆内某点处单位体积的应变能为应变能密度 U_0，从 0 到某个应变 ε 的 $U_0=\int_0^{\varepsilon}\sigma\delta\varepsilon$。由于 $\sigma=E\varepsilon$，所以，应变能密度 $U_0=\frac{1}{2}E\varepsilon^2$。又由于 $\varepsilon=\frac{du(x)}{dx}$，故杆内总应变能 π_0 为：

$$\pi_0=\int_V\frac{E}{2}\varepsilon^2dV=\int_0^l\frac{AE}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx \tag{1.4}$$

如考虑杆的 B 端($x=l$)作用力所作的功 $W=(pu)_{x=l}$，则杆的总势能 π 等于总应变能 π_0 减去外力功 W 为：

$$\pi=\pi_0-W=\int_0^l\frac{AE}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx-(pu)_{x=l} \tag{1.5}$$

杆的总势能 π 是位移 u 的导数的函数，而 u 又是自变量 x 的函数，所以总势能 $\pi[u']$ 是一种泛函。这仍是一种积分的描述方法。

这类例子不胜枚举。泛函广泛地存在于数学、物理、力学问题之中。

由上面三个例子可以看出，一个函数对应着泛函的一个数值；另一个函数对应着泛函的另一个数值。这种建立在函数与数值之间的对应关系叫做泛函关系。所以泛函定义为：

设 $\{y(x)\}$ 是已给的函数集，如果对于这个集合中任意函数 $y(x)$ 恒有某个确定的数与之对应，记为 $\pi[y]$，则说 $\pi[y]$ 是定义于集合 $\{y(x)\}$ 上的一个泛函。从这个定义可以看出，泛函有两个基本点：

(1)泛函有它的定义域，这个定义域是指满足一定条件的函数集。这个一定条件是指边界条件、初始条件和函数的连续程度。人们把定义域内的这种函数称为可取函数或容许函数。

(2)泛函 $\pi[y]$ 与可取函数 $y(x)$ 有明确的对应关系。泛函的值是由一条可取曲线的整体性质决定的，它表现在“积分”上。在固体力学中，这种积分往往具有能量性质，所以有时称为能量泛函，如例题 1.3 所述。

若对泛函提出某种要求，如要求例题 1.1 中 AB 曲线长度最短；要求例题 1.2 中质点从 A 滑到 B 所需时间最短；要求例题 1.3 中杆的总势能最小或在外力作用下平衡，那么，就要对泛函取极值，这时，就要用到泛函的变分 δ，这个变分符号 δ 和微分算符 d 可以进行类比。取函数的微分 $dy=\frac{dy}{dx}dx=0$，由于 $dx\neq0$，所以 $dy/dx=0$，便取得极值点。类似地，上面三个

例子的变分提法为：例题 1.1 是曲线在两端固定的边界条件下，通过取曲线长度（泛函）的变分为零，即 $\delta L=0$，可求得最短曲线；例题 1.2 是在两端固定的边界条件下，通过取质点滑过曲线所需时间（泛函）的变分为零，即 $\delta T=0$，可求得最速降线；例题 1.3 是在 O 端固定，B 端受 p 力作用的边界条件下，取杆的总势能（泛函）的变分为零，即 $\delta\pi=0$，可得平衡态下的位移函数。

1.1.2 变分问题的直接解法——里兹法

直接解法都是逆解法，即先假设满足本质性边界条件（狄里克雷边界条件）的某个函数就是极值函数。在这个极值函数内，设置一些待定系数。将此函数代入问题的泛函后令其变分等于零，则可求得这些待定系数，因而，可得问题的解。

例题 1.4 已知 $y(0)=y(1)=0$，试确定 $y=f(x)$，使泛函：

$$\pi=\int_0^1(y'^2-y^2-2xy)\mathrm{d}x$$

取极值。

解 满足本质性边界条件的函数类就是可取函数。在可取函数中取如下三种试探函数分别求解。

(1) 取试探函数 $y_1=a_1x(1-x)$

这个函数体现了 $x=0$ 时，$y_1=0$；$x=1$ 时，$y_1=0$ 满足本质性边界条件。待定系数为 a_1。将 y_1，y_1' 代入本题函数中，得：

$$\pi(a_1)=\int_0^1[a_1^2(1-2x)^2-a_1^2x^2(1-x)^2-2a_1x^2(1-x)]\mathrm{d}x$$

此式随 a_1 而变。通过对 a_1 取极值 $\delta\pi(a_1)=0$，或 $\frac{\mathrm{d}\pi(a_1)}{\mathrm{d}a_1}=0$，得：

$$\frac{\mathrm{d}\pi(a_1)}{\mathrm{d}a_1}=\int[2a_1(1-2x)^2-2a_1x^2(1-x)^2-2x^2(1-x)]\mathrm{d}x=0$$

解得：$a_1=\frac{5}{18}$

所以：$y_1=\frac{5}{18}x(1-x)$

(2) 取试探函数 $y_2=(a_1+a_2x)x(1-x)$

此函数也满足本质性边界条件，待定系数为 a_1、a_2。将 y_2、y_2' 代入泛函中，并分别取

$$\frac{\partial\pi(a_1,a_2)}{\partial a_1}=0,\frac{\partial\pi(a_1,a_2)}{\partial a_2}=0$$

积分后得方程组：

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{5}a_1+\frac{3}{10}a_2=\frac{1}{6}\\ \frac{3}{10}a_1+\frac{26}{105}a_2=\frac{1}{10}\end{aligned}\right\}$$

或写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{26}{105}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{10}\end{Bmatrix}$$

由此解得：$a_1=\frac{71}{369},a_2=\frac{7}{41}$

所以：$y_2=\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right)x(1-x)$

(3)取试探函数 $y_3=(a_1+a_2x+a_3x^2)x(1-x)$

此函数仍满足本质性边界条件，待定系数为 a_1、a_2、a_3。将 y_3、y_3' 代入泛函中，并分别取：

$$\frac{\partial\pi(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_1}=0,\frac{\partial\pi(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_2}=0,\frac{\partial\pi(a_1,a_2,a_3)}{\partial a_2}=0$$

积分后得方程组：

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{19}{105}\\ \frac{3}{10} & \frac{26}{105} & \frac{79}{420}\\ \frac{19}{105} & \frac{79}{420} & \frac{103}{603}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{10}\\ \frac{1}{15}\end{Bmatrix}$$

由此解得：$a_1=0.1896,a_2=0.1849,a_3=-0.0142$

所以：$y_3=(0.1896+0.1849x-0.0142x^2)x(1-x)$

此问题的解析解可通过泛函的欧拉方程及第一类边界条件：

$$y''+y+x=0\qquad y(0)=y(1)=0$$

而求得：

$$y=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$$

将数值解和解析解的比较列于表 1-1 中。

表 1-1 数值解和解析解的比较

x	y_1	y_2	y_3	y(解析解)
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.0444	0.03625	0.03616	0.03610
0.4	0.06667	0.06257	0.06271	0.06278
0.6	0.06667	0.07076	0.07091	0.07102
0.8	0.04445	0.05264	0.05255	0.05250
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
π	-.02315	-.02457	-.02457	-.02457

由表 1-1 可以看出，随着试探函数阶次的提高，数值解逐渐逼近解析解。

将例题 1.4 中的试探函数 y_1、y_2、y_3 写成待定系数 $a_i(i=1,2,3)$ 展开的形式：

$$y_1=a_1x(1-x)=a_1N_1(x)$$

$$y_2=(a_1+a_2x)x(1-x)=a_1N_1(x)+a_2N_2(x)=\sum_{i=1}^{2}a_iN_i(x)$$

$$y_3=(a_1+a_2x+a_3x^2)x(1-x)=a_1N_1(x)+a_2N_2(x)+a_3N_3(x)=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i(x)$$

式中，$N_i(x)$ 为坐标的函数。已经证明，试探函数：

$$y_n=\sum_{i=1}^{n}a_iN_i(x)$$

当 $n\to\infty$ 时，通过代入泛函取极值求出的 y_n 将收敛到精确解。这样确定的试探函数系列 $\{y_n\}$ 称为泛函的极小化序列。这种选取试探函数对泛函进行变分的直接解法称为里兹法。a_i 称为里兹参数，在有限元中是代求的节点函数值；$N_i(x)$ 称为里兹基函数，是一族线性无关的坐标函数，在有限元中是插值函数或称形函数，需预先构造。

例题 1.5　已知 $y(0)=1, y_1'(1)=0$ 试确定 $y=f(x)$，使泛函：

$$\pi=\int_0^1 (y_2' - y_2 - 2xy)\,\mathrm{d}x$$

取极值。

解　本问题和例题 1.4 不同之处在于有了自然边界条件（黎曼边界条件）$y'(1)=0$。解析解变为：

$$y=\frac{\sin x}{\cos 1}-x$$

用里兹求解。在可取函数类中取试探函数：

$$y_2=(a_1+a_2x)x$$

$$y_3=(a_1+a_2x+a_3x^2)x$$

将 y_2、y_2'、y_3、y_3' 分别代入泛函中，变分求极值后，计算结果与解析解比较如表 1-2 所示。

表 1-2　里兹解的计算结果

x	y_2	y_3	y（解析解）	y'_2	y'_3	y'（解析解）
0.0	0.0	0.0	0.0	0.9856	0.8570	0.8504
0.2	0.1799	0.1679	0.1677	0.8129	0.8116	0.8139
0.4	0.3252	0.3204	0.3207	0.6403	0.7024	0.7047
0.6	0.4360	0.4446	0.4450	0.4676	0.5294	0.5275
0.8	0.5122	0.5279	0.5277	0.2950	0.2925	0.2895
1.0	0.5540	0.5574	0.5574	0.1223	-0.0082	0.0000

表 1-2 说明，试探函数阶次提高，则函数的数值结果精度提高，导数的数值结果精度也提高，但没有函数的数值结果的精度高。表 1-2 还说明，试探函数只需考虑到本质性边界条件，无需考虑自然边界条件，计算结果会自然得到满足。如 $x=1$ 时，$y_2'=0.1223$，$y_3'=-0.0082$，趋于自然边界条件 $y'(l)$。此例泛函中并非不含自然边界条件，而是由于这个自然边界条件是齐次的缘故，传热问题的绝热边界条件就是如此。

总结以上两例，里兹法可归纳如下：

(1) 里兹法是在给定泛函的前提下，在全区域内选择试探函数代入泛函，然后进行变分求极值的方法。试探函数的形式为：

$$y_n=\sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x) \tag{1.6}$$

y_n 是里兹基函数 $N_i(x)$ 的线性组合。常取 $N_i(x)$ 为线性无关的幂级数，如例题 1.4、例题 1.5 所述。

(2) 里兹法试探函数只需在满足本质性边界条件的可取函数类中选取，无需考虑自然边界条件，自然边界条件会自然得到满足。

以上两点说明，里兹法试探函数的选取是很容易的，克服了微分方程求解对边界条件要

求苛刻的缺点。

(3)里兹法归结为下列线性代数方程的求解：

$$Ka=b \tag{1.7}$$

式中，系数矩阵 K 一般是对称正定的，给求解带来了很大方便。

里兹法的根本性缺点是在全区域上选取试探函数，这在工程上是很难做到的。有限单元法在单元上选取试探函数，使这种变分问题的直接解法变成了工程计算中的现实，所以，有限元法继承了里兹法的优点，克服了里兹法的缺点，开创了数值计算一个全新的领域。

1.1.3 加权余量法—伽辽金法

用里兹法求解泛函变分问题的关键是如何找到泛函。从例题1.1、例题1.2、例题1.3看到，泛函是以数学、物理、力学为背景知识求出的。在弹性力学中已经建立的许多变分原理就可以拿来应用。由于许多问题已经有了微分方程，本节说明从微分方程出发建立积分形式的加权余量法。因为有的微分方程没有对应的经典意义的泛函，因而加权余量法的适用范围更加广泛。

假设微分方程用算子表示如下：

$$L(y)=f \tag{1.8}$$

加权余量法的基本思想是：为了求微分方程式(1.8)的解 y，首先假设有一个满足边界条件和具有一定连续程度的试探函数 $\tilde{y}$，将此近似函数代入原方程式(1.8)，若不等于零，而得一余量 R：

$$L(\tilde{y})-f=R \tag{1.9}$$

此余量随试探函数而变，通过把余量 R 与加权函数 W_i 正交化的途径，化为代数方程组，而获得近似解。也就是令 R 分别与 W_i 的内积为零，其表达式为：

$$<R,W_i> = \int_l R\cdot W_i\mathrm{d}x=0 \tag{1.10}$$

或

$$\int_l [L(\tilde{y})-f]\cdot W_i\mathrm{d}x = 0, i = 1,2,\cdots,n$$

这种在加权平均意义下迫使误差为零的方法称为加权余量法。(1.10)式中试探函数 $\tilde{y}$ 可按里兹法选择：

$$\tilde{y}=\sum_{i=1}^{n}a_iN_i(x)$$

由于加权余量法是从微分方程出发的，所以，$\tilde{y}$ 要求满足所有的边界条件。若把加权余量法应用到自然边界时，得到的解将在加权平均意义上使自然边界条件得到满足。对(1.10)式进行分布积分可以降低对试探函数 $\tilde{y}$ 中的基函数 $N_i(x)$ 的连续性要求。人们把这样得到解叫广义解或弱解。

伽辽金法是在加权余量法中，取里兹基函数 N_i 为权函数 W_i，即取成插值函数：

$$\int_l R\cdot N_i\mathrm{d}x = 0 \quad (i=1,2) \tag{1.11a}$$

或

$$\int_l [L(\tilde{y})-f]\cdot N_i(x)\mathrm{d}x = 0, i = 1,2,\cdots,n \tag{1.11b}$$

例题1.6 假设微分方程：

$$L(y)-f=y''+y+x=0$$

边界条件 $y(0)=y(l)=0$ 求近似解。

为了说明这种方法，把试探函数写成按系数 a_i 展开的形式：

$$\tilde{y}=a_1(1-x)x+a_2(1-x)x^2=\sum_{i=1}^{2}a_1N_i(x)$$

式中：$N_1(x)=x(1-x)$，$N_2(x)=x^2(1-x)$

伽辽金法中把权函数取成里兹基函数 N_i：

$$\int_l R\cdot N_i\mathrm{d}x=0\quad(i=1,2)$$

得两个方程：

$$\int_0^1 R\cdot x(1-x)\mathrm{d}x=0,\int_0^1 R\cdot x^2(1-x)\mathrm{d}x=0$$

将余量代入后得：

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{10} & \frac{3}{20}\\ \frac{3}{20} & \frac{13}{105}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{12}\\ \frac{1}{20}\end{Bmatrix}$$

解得：$a_1=\dfrac{71}{369}$，$a_2=\dfrac{7}{41}$

所以：$\tilde{y}=\left(\dfrac{71}{369}+\dfrac{7}{41}x\right)x(1-x)$

例题 1.4 和例题 1.6 实际上是同一个问题，但求解方法不一样，由于所选的权函数与里兹基函数一致，所以伽辽金解（例题 1.6）与里兹解（例题 1.4）一样。

1.2 弹性力学的变分原理——虚功原理

变分问题的里兹法和伽辽金法是有力学背景的。里兹法相应于弹性力学中的最小势能原理，伽辽金法相应于虚功原理。能用里兹法求解的问题都能用伽辽金法求解，但伽辽金法能求解的问题有些却不能用里兹法求解。当微分方程的算子 L 对称正定时，伽辽金法等价于里兹法。在弹性力学中，由虚功原理可以导出最小势能原理。在本书中，固体力学有限元法都采用虚功原理，而其他问题都统一采用伽辽金法。

1.2.1 虚功原理

虚功原理蕴含着比牛顿运动定律的平衡条件更为基本的力学原理，是平衡方程的弱形式，也能产生弱解。

定义：作用在一个质点上的力，当给与这个质点一个允许的、假想的、微小的位移时，此力沿这个位移所做的功称为虚功。这个可能的、微小的、假想的位移称为虚位移。对于质点系也可以作出同样的定义，但虚功必须求和或积分。

虚位移的概念应从四个方面理解：

第一，虚位移是一种允许位移，必须满足质点或质点系所给的约束条件，即约束允许的位移。固体力学中，可以把自由弹性体看成相互间有一定约束的无数个质点组成的系统，这种约束称为变形协调，即变形前的连续体，变形后仍必须是连续的。如果该弹性体受到边界

约束,就不是自由弹性体。该弹性体各个质点的微小位移不仅要满足变形协调,而且还要满足边界约束。在满足这两项要求下,各种允许位移才都是虚位移。

第二,虚位移是假想的,一般有无穷多种可能性。真实位移是在一定外载和初始条件下,受同样约束的位移。真实位移是唯一的,是虚位移之一。

第三,虚位移是一种微小位移,这种微小位移应理解为无穷小,可以对它标以变分记号 δ。如果某点位移用 u_i 表示,则虚位移用 δu_i,而真实位移的微小增量用 du_i 表示。由此也可以看出变分和微分性质上的差别,du_i 是唯一的,δu_i 一般有无穷多种可能性。

第四,质点或质点系在虚位移的过程中,原有的力和应力均应保持不变。

由上面四点可以得出结论,虚位移就是位移的变分。

虚功原理可表述为:如果质点系在外力作用下是平衡的,则全部主动力和约束力在由平衡位置算起的任何位移上所做的虚功的总和等于零。反之,若作用在质点系上的全部主动力和约束力再由某位置算起的任何虚位移上所做的虚功的总和等于零,则此质点系在该位置上必处于平衡,对应的,可以建立虚功原理或余虚功原理。

虚功原理的应用范围极其广泛,它对于线性、非线性及与时间相关的问题都是普遍适用的,但对于具有耗散功能的系统不适用,因为它只是机械能守恒原理。虚功原理在力系不变的条件下给定虚位移,要求位移场发生微小变化后仍是变形协调的,并没有要求力系仍是平衡的。因此,利用虚功原理导出的位移场是精确的变形协调位移场,导出的力系却只是近似地满足平衡方程。

弹性体在外力作用下产生变形,弹性体的虚功原理为:在外力作用下的弹性体,对于由任何平衡位置算起的虚位移,其虚应变能等于外力虚功。它的表达式是:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}V = \int_V \delta\boldsymbol{u}^T \cdot \bar{\boldsymbol{f}} \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \delta\boldsymbol{u}^T \cdot \bar{\boldsymbol{P}} \mathrm{d}S \tag{1.12}$$

式中 δu,$\delta\varepsilon$ 分别为虚位移向量、虚应变向量 $\bar{\boldsymbol{f}}$,$\bar{\boldsymbol{P}}$ 为外力(体力和面力)。

1.2.2 最小势能原理

最小势能原理可表述为:在物体静力协调的不变外载作用下,所有满足位移边界条件的许可位移场中,只有满足平衡条件的位移使势能取最小值。它的表达式是:

$$\delta\pi = 0 \tag{1.13}$$

$$\pi = \pi_0 - W \tag{1.14}$$

式中 π 为弹性体的总势能,W 为外力功,π_0 为弹性体的应变能,由下式确定:

$$\pi_0 = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T D\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V \tag{1.15}$$

其中 V 为弹性体的体积,$\boldsymbol{D}$ 为弹性常数矩正阵。

小　结

本章简要地介绍了微分方程的近似求解方法——加权余量法。由于权函数可以采用不同形式的函数形式,由此可以建立不同的加权余量格式,被有限元法利用为理论基础的伽辽金法便是其中的一种。实际上还可以根据所分析问题的类型和特点,发展其他形式的加权余量格式,如配点法、子域法、力矩法等。

作为弹性力学微分方程的等效积分形式,虚功原理是平衡方程和力的边界条件的等效