最新版21世纪高等学校导学与导考教材

王瑞林 黄璞生 主编

高等数学（上册）

（同济五版）

习题详解与考研训练

学好高等数学的益友良师

- 知识重点提示
- 学习难点解惑
- 典型习题汇萃
- 解题思路开拓
- 考研题目训练

陕西科学技术出版社

最新版21世纪高等学校导学与导考教材

高等数学

（同济五版）

习题详解与考研训练

（上　册）

主编　　王瑞林　黄璞生
编者　　刘孝艳　王培健
　　　　王武习

陕西科学技术出版社

内 容 简 介

本书是一本大学高等数学课程的辅助教材和考研辅导教材，上册内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数共七章。

每章由各节的知识点考点、各节习题及本章总习题的详细解答、本章考研训练题三部分组成。

本书对于帮助广大同学学好高等数学，理解基本概念，应用基本定理，训练基本技能，提高分析问题和解题的能力，掌握高等数学的解题方法，解题规律和解题技巧，开拓解题思路，全面增强数学素质，进行考研训练都会起到良好的效果。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(同济五版)习题详解与考研训练/王瑞林，黄璞生主编.
—西安：陕西科学技术出版社，2005
ISBN 7-5369-3962-0

Ⅰ.高... Ⅱ.①王... ②黄... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 058472 号

出版者 陕西科学技术出版社
西安北大街 131 号 邮编 710003
电话(029)87211894 传真(029)87218236
http://www.snstp.com
发行者 陕西科学技术出版社
电话(029)87212206 87260001
印 刷 西安信达雅印务有限责任公司
规 格 787mm×1092mm 1/16 开本
印 张 16.25
字 数 491 千字
印 数 1~4000 册
版 次 2005 年 8 月第 1 版
2005 年 8 月第 1 次印刷
定 价 24.00 元(上册)

前　　言

高等数学是高等工科院校的一门非常重要的基础课，也是硕士研究生入学考试全国统一命题的必考课程。同济大学《高等数学》（第五版）教材自出版以来，被越来越多的高等工科院校所采用。该教材在以前版本的基础上作了较大的改动，调整了部分章节的内容，增加了部分习题。为了帮助广大同学学好《高等数学》这门课程，为学习大学的后续课程以及考研打好坚实的基础，我们根据多年的教学经验和历届考研辅导留给我们的深刻体会，结合学生反馈的信息，从指导教学、学习和考试、考研的角度出发，精选出涉及广泛、类型众多、综合性、技巧性强的题目，汇编成《高等数学（同济五版）习题详解和考研训练》一书。

本书按照高等数学（同济五版）教材的章节顺序，分为十二章，各章节顺序与高等数学（同济五版）教材的章节顺序完全相同，内容紧密配合，每章均设计了三个板块。

一、各节知识点考点　列出了该节的基本概念，重要的定理公式，突出考点的核心知识，使同学们对本节的内容一目了然。

二、各节习题全解　对课后习题以及各章总习题全部作了详细解答。对一些较难的题目，从分析题目的条件入手，结合所学知识，除作了较详细的解答外，有的题目还给了几种解法，以帮助同学们提高分析问题和解题的能力，掌握高等数学的解题方法，解题规律和解题技巧。

三、各章考研训练题精选了部分常考题型，以及 1991—2005 年的考研真题，按章分列，并给出了较为详细的分析和解答，这些题目覆盖了本章的内容，题型典型、解法灵活，解题方法富于技巧。通过这些题目帮助同学们对本章内容进行全面复习，用以加深理解基本概念和理论，提高知识水平，提高分析能力和综合解题能力，开拓解题思路，全面增强数学素质。对于进行考研训练将会收到良好的效果。

同学们在使用本书时，希望应先经过独立思考，自己动手，作出解答，然后再与本书给出的解答对照检查，不要依赖于本书给出的解答。

本书由王瑞林策划，分上、下两册出版。第一、二、三、四、五、六章由王瑞林编写，第七、八章由黄璞生编写，第九、十章由王培健编写，第十一、十二章由刘孝艳编写。全书由王瑞林和黄璞生统稿，王武习对全书及习题的答案作了仔细的校正。

希望本书能够对广大工科院校的在校本科生、专升本学生及有志考研的学生在学习高等数学课程中有所帮助，成为同学们的知心朋友。由于水平有限，书中疏漏不妥之处，在所难免，恳请各位读者及同行不吝赐教。

编　者

2005.8

目 录

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

知识点·考点

1. 函数的定义

设数集 $D \subset R$,则称映射 $f: D \to R$ 为定义在D上的函数,记为 $y = f(x), x \in D$.其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f = D$.

函数定义中,对每个 $x \in D$,按对应法则 f,总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数 f 在x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y = f(x)$.函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记作 R_f或$f(D)$.

构成函数的两个要素是:定义域 D_f 及对应法则f.

2.函数的几种特性

(1) 有界性　$\exists M > 0, \forall x \in X \subset D, |f(x)| \leqslant M$.

(2) 单调性　$\forall x_1, x_2 \in I \subset D, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,(或 $f(x_1) < f(x_2)$).

(3) 奇偶性　$\forall x, -x \in D, f(-x) = -f(x)$(或 $f(-x) = f(x)$).

(4) 周期性　$\forall x, x + T \in D, f(x + T) = f(x)$.

3.反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X,值域为 Y.如果对于 Y 中的任一y,由函数式 $y = f(x)$ 能在 X 中确定唯一的x与它对应:$x = \varphi(y)$,那么,函数 $x = \varphi(y)$ 就叫做 $y = f(x)$ 的反函数.它的定义域是 Y. $y = f(x)$ 的反函数也常记作 $x = f^{-1}(y)$.

4.复合函数

设 $y = f(u), u = \varphi(x)$,且当 x 在某一范围内取值时,相应的 u 值可使$f(x)$ 有意义,则称 y 是 x 的复合函数,记为 $y = f[\varphi(x)]$.其中 u 叫中间变量.

注意,在进行函数复合时,函数 $\varphi(x)$ 的值不能超出函数 $y = f(u)$ 的定义域.

5. 初等函数

幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

习题 1－1 解答

1. 设$A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty), B = [-10, 3)$,写出$A \cup B, A \cap B, A \setminus B$及$A \setminus (A \setminus B)$的表达式.

解　$A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$;$A \cap B = [-10, -5)$;

$A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$;$A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5)$.

2. 设 A、B、C 是任意三个集合,证明对偶律:$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

证　$I = I \cap I = (A \cup A^C) \cap (B \cup B^C)$

$= (A \cap B) \cup (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \cup (A^C \cap B^C) = (A \cap B) \cup (A^C \cup B^C)$.

又$(A \cap B) \cap (A^C \cup B^C) = \phi$,所以$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

3. 设映射 $f: X \to Y, A \subset X, B \subset X$.证明

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;　(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

证　(1) 设 $C = f(A \cup B), D = f(A) \cup f(B)$.

若 $y \in C$,则必有 $x \in A \cup B$,使 $f(x) = y$.

当 $x \in A$ 时,$f(x) = y \in f(A)$,当 $x \in B$ 时,$f(x) = y \in f(B)$.

于是,$y = f(x) \in f(A) \cup f(B) = D$.即 $C \subset D$.

同理可证 $D \subset C$.于是,$C = D$.即 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) 若 $y \in f(A \cap B)$,则一定有 $x \in A \cap B$,使 $f(x) = y$.

因 $x \in A$,所以 $f(x) = y \in f(A)$,又因 $x \in B$,所以 $f(x) = y \in f(B)$.于是 $y \in f(A) \cap f(B)$,即 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. 设映射 $f: X \to Y$,若存在一个映射 $g: Y \to X$,使 $g \circ f = I_X$,$f \circ g = I_Y$,其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射,即对于每一个 $x \in X$,有 $I_X x = x$;对于每一个 $y \in Y$,有 $I_Y y = y$.证明:f 是双射,且 g 是 f 的逆映射:$g = f^{-1}$.

证 用反证法.若 f 不是满射的,即至少有一个 $y_0 \in y$,对任 $x \in X$,$f(x) \neq y_0$.又已知 $g: y \to X$,所以有确定的 $x_0 \in X$,使 $g(y_0) = x_0$,于是 $f \circ g(y_0) = f(x_0) \neq y_0$,与条件“$f \circ g = I_Y$”矛盾,故 f 是满射的.

若 f 不是一一的,即至少有 $x_1, x_2 \in X$,$x_1 \neq x_2$,使 $f(x_1) = f(x_2) = y_0 \in Y$,于是

$$g \circ f(x_1) = g(y_0) = g \circ f(x_2),$$

与已知条件“$g \circ f = I_X$”矛盾,故 f 是一一的.

综上,f 是双射的,且显然 g 是 f 的逆映射.

5. 设映射:$f: X \to Y$,$A \subset X$.证明:

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$; (2) 当 f 是单射时,有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

证 (1) 若 $x_1 \in A$,则有 $f(x_1) = y_0 \in f(A)$,又若有 $x_2 \in X \cap \overline{A}$,也有 $f(x_2) = y_0 \in f(A)$.则 $f^{-1}(y_0) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \in f^{-1}(f(A))$.

注意:$x_2 \notin A$,所以 $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

(2) 由(1)知:当 f 是单射时,显然有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

6. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{3x+2}$;　　(2) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

(3) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;　　(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5) $y = \sin\sqrt{x}$;　　(6) $y = \tan(x+1)$;

(7) $y = \arcsin(x-3)$;　　(8) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$;

(9) $y = \ln(x+1)$;　　(10) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) 定义域为 $3x+2 \geqslant 0$,即 $D = [-\dfrac{2}{3}, +\infty)$.

(2) 定义域为 $x \neq \pm 1$,即 $D = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 定义域为 $x \neq 0$,且 $1 - x^2 \geqslant 0$,即 $x \neq 0$,$-1 \leqslant x \leqslant 1$,从而 $D = [-1,0) \cup (0,1]$.

(4) 定义域为 $4 - x^2 > 0$,由此得 $-2 < x < 2$,即 $D = (-2,2)$.

(5) 定义域为 $x \geqslant 0$,即 $D = [0, +\infty)$.

(6) 定义域为 $x + 1 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$,即 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} - 1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(7) 定义域为 $-1 \leqslant x - 3 \leqslant 1$.即 $D = [2,4]$.

(8) 定义域为 $3 - x \geqslant 0$,且 $x \neq 0$,即 $D = (-\infty,0) \cup (0,3]$.

(9) 定义域为 $x + 1 > 0$,即 $D = (-1, +\infty)$.

(10) 定义域为 $x \neq 0$,即 $D = (-\infty,0) \cup (0, +\infty)$.

7. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

(4) $f(x)=1$, $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解　(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同,因它们的定义域不相同;

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同,因它们的对应法则不相同;

(3) $f(x)=g(x)$,因它们的定义域相同且对应法则也一样.

(4) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同,因它们的定义域不相同.

8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $\varphi(\frac{\pi}{6}),\varphi(\frac{\pi}{4}),\varphi(-\frac{\pi}{4})$, $\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解　$\varphi(\frac{\pi}{6})=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$,　$\varphi(\frac{\pi}{4})=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\varphi(-\frac{\pi}{4})=\left|\sin(-\frac{\pi}{4})\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \varphi(-2)=0.$$

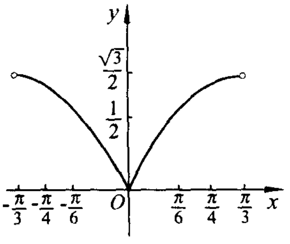

图 1－1

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1－1 所示.

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$, $(-\infty,1)$;　　　(2) $y=x+\ln x$, $(0,+\infty)$.

证　(1) $\forall x_1,x_2\in(-\infty,1)$,且 $x_1<x_2$,则

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0,$$

从而 $y(x_2)>y(x_1)$,故 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在$(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2) $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则

$$y(x_2)-y(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=(x_2-x_1)+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

从而 $y(x_2)>y(x_1)$,故 $y=x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$ 内单调增加.

10. 设 $f(x)$ 为定义在$(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也单调增加.

证　任取 $x_1,x_2\in(-l,0)$,且 $x_1<x_2$,则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$ 且 $-x_1>-x_2$.因 $f(x)$ 是$(-l,l)$ 内的奇函数,且在$(0,l)$ 内单调增,有 $f(-x_1)>f(-x_2)$,即 $-f(x_1)>-f(x_2)$,从而 $f(x_1)<f(x_2)$,故 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$ 上的.证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的积是偶函数,两个奇函数的积是偶函数,偶函数与奇函数的积是奇函数.

证　设 $f_1(x),f_2(x)$ 为奇函数,$g_1(x),g_2(x)$ 为偶函数,

(1) 因 $g_1(-x)+g_2(-x)=g_1(x)+g_2(x)$,所以两个偶函数的和是偶函数.

因 $f_1(-x)+f_2(-x)=-[f_1(x)+f_2(x)]$,所以两个奇函数的和是奇函数.

(2) 因 $g_1(-x)g_2(-x)=g_1(x)g_2(x)$,所以两个偶函数的积是偶函数.

因 $f_1(-x)f_2(-x)=[-f_1(x)][-f_2(x)]=f_1(x)f_2(x)$,所以两个奇函数的积是偶函数.

因 $f_1(-x)g_1(-x)=-f_1(x)g_1(x)$,所以偶函数与奇函数的积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y = x^2(1 - x^2)$;　　(2) $y = 3x^2 - x^3$;

(3) $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$;　　(4) $y = x(x - 1)(x + 1)$;

(5) $y = \sin x - \cos x + 1$;　　(6) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

解 (1) 偶函数;(2) 既非奇函数又非偶函数;(3) 偶函数;(4) 奇函数;(5) 既非奇函数又非偶函数;(6) 偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期.

(1) $y = \cos(x - 2)$;　　(2) $y = \cos 4x$;　　(3) $y = 1 + \sin \pi x$;

(4) $y = x\cos x$;　　(5) $y = \sin^2 x$.

解 (1) 是周期函数,周期 $l = 2\pi$;(2) 是周期函数,周期 $l = \dfrac{\pi}{2}$;(3) 是周期函数,周期 $l = 2$;(4) 不是周期函数;(5) 是周期函数,周期 $l = \pi$.

14. 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt[3]{x + 1}$;　　(2) $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$;

(3) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}(ad - bc \neq 0)$. 又问当 a,b,c,d 满足什么条件时,这反函数与直接函数相同?

(4) $y = 2\sin 3x$;　　(5) $y = 1 + \ln(x + 2)$;

(6) $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$.

解 (1) 由 $y = \sqrt[3]{x + 1}$,解得 $x = y^3 - 1$,从而反函数为 $y = x^3 - 1$.

(2) 由 $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ 解得 $x = \dfrac{1 - y}{1 + y}$,从而反函数为 $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

(3) 由 $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ 有 $ax + b = cyx + dy$,解得 $x = \dfrac{dy - b}{a - cy}$,故其反函数为 $y = \dfrac{dx - b}{a - cx}$.

要使此反函数与其直接函数相同,必须 $\dfrac{ax + b}{cx + d} = \dfrac{b - dx}{cx - a}$,即

$$(ax + b)(cx - a) = (cx + d)(b - dx),$$

整理后得

$$c(a + d)x^2 + (d^2 - a^2)x - b(a + d) = 0.$$

比较恒等式两边系数,得

$$\begin{cases} c(a + d) = 0, \\ d^2 - a^2 = 0, \\ b(a + d) = 0. \end{cases}$$

所以当 a,b,c,d 满足条件 $a + d = 0$ 或 $b = c = 0$ 且 $a = d \neq 0$ 时,反函数与直接函数相同.

(4) 由 $y = 2\sin 3x$ 解得 $x = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$,从而得反函数为 $y = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) 由 $y = 1 + \ln(x + 2)$ 解得 $x = e^{y-1} - 2$,从而得反函数为 $y = e^{x-1} - 2$.

(6) 由 $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$ 解得 $x = \log_2\dfrac{y}{1 - y}$,从而反函数为 $y = \log_2\dfrac{x}{1 - x}$.

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证 若 $f(x)$ 在 X 上既有上界 K_1 又有下界 K_2,则 $\forall x \in X$,有 $K_2 \leqslant f(x) \leqslant K_1$,令 $M = \max\{|K_1|, |K_2|\}$,则 $\forall x \in X$,有 $|f(x)| \leqslant M$,故 $f(x)$ 在 X 上有界.

反之,若 $f(x)$ 在 X 上有界,则必存在 $M > 0$,使得 $\forall x \in X$,都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立,即 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$,所以 $f(x)$ 在 X 上既有上界 M,又有下界 $-M$.

16. 在下列各题中,求由所给函数复合而成的函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}$;　(2) $y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}$;

(3) $y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2$;　(4) $y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1$;

(5) $y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1$.

解　(1) $y = \sin^2 x, y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{3}{4}$;

(2) $y = \sin 2x, y_1 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;

(3) $y = \sqrt{1 + x^2}, y_1 = \sqrt{2}, y_2 = \sqrt{5}$;

(4) $y = e^{x^2}, y_1 = 1, y_2 = e$;

(5) $y = e^{2x}, y_1 = e^2, y_2 = e^{-2}$.

17. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,问(1) $f(x^2)$,(2) $f(\sin x)$,(3) $f(x+a)$,$(a>0)$,(4) $f(x+a) + f(x-a)(a>0)$ 的定义域各是什么?

解　由 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,有

(1) $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$,即 $|x| \leqslant 1$,所以 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(2) $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$,所以,$f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$,$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(3) $0 \leqslant x + a \leqslant 1$,可得 $-a \leqslant x \leqslant 1 - a$,所以 $f(x+a)(a>0)$ 的定义域为 $[-a, 1-a]$.

(4) 由 $\begin{cases} 0 \leqslant x + a \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x - a \leqslant 1 \end{cases}$,可解得 $\begin{cases} -a \leqslant x \leqslant 1 - a, \\ a \leqslant x \leqslant 1 + a. \end{cases}$

因 $a > 0$,所以当 $1 - a < a$,即 $a > \frac{1}{2}$ 时,此不等式组无解;而当 $1 - a \geqslant a$ 即 $a \leqslant \frac{1}{2}$ 时,不等式组的解为 $a \leqslant x \leqslant 1 - a$.

从而得 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域为 $[a, 1-a]$.

18. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$　$g(x) = e^x$,求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解　当 $x < 0$ 时,$0 < g(x) = e^x < 1$,当 $x = 0$ 时,$g(x) = 1$,当 $x > 0$ 时,$g(x) = e^x > 1$,

从而　$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0, \end{cases}$　$g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$

上述两个函数的图形如图 1－2 所示.

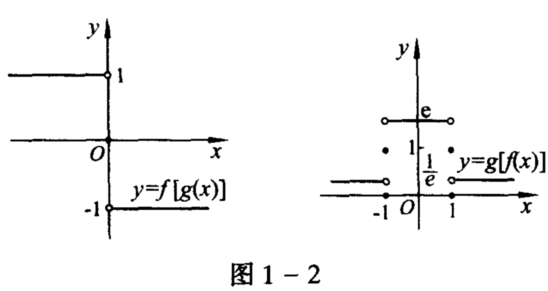

图 1－2

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi = 40°$(见图 1－3).当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并说明定义域.

解　$AB = CD = \dfrac{h}{\sin 40^\circ}$，　$AD = b + 2h\cot 40^\circ$，

$$S_0 = \frac{1}{2}h(AD + BC) = \frac{1}{2}h(b + 2h\cot 40^\circ + b)$$
$$= h(b + h\cot 40^\circ),$$

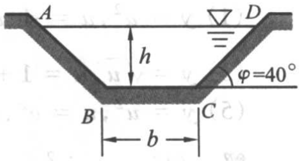

图 1－3

解得 $b = \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40^\circ$，从而湿周

$$L = AB + BC + CD = \frac{2h}{\sin 40^\circ} + b$$
$$= \frac{2h}{\sin 40^\circ} + \frac{S_0}{h} - h\cot 40^\circ = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h.$$

由 $h > 0, b = \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40^\circ > 0$，得定义域为$(0, \sqrt{S_0 \tan 40^\circ})$.

第二节　　数列的极限

知识点 · 考点

1. 数列极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. 收敛数列的性质

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限必唯一.

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a > 0$(或 $a < 0$)，则存在正整数 $N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $x_n > 0$(或 $x_n < 0$).

(4) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任一子数列也收敛于 a.

习题 1－2 解答

1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n = \dfrac{1}{2^n}$；　(2) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$；

(3) $x_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$；　(4) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$；　(5) $x_n = n(-1)^n$.

解　(1) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{128}, \cdots$，易见 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(2) $-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{7}, \cdots$，易见 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(3) $3, 2\dfrac{1}{4}, 2\dfrac{1}{9}, 2\dfrac{1}{16}, 2\dfrac{1}{25}, 2\dfrac{1}{36}, 2\dfrac{1}{49}, \cdots$，易见 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

(4) $0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{6}{8}, \cdots$，易见 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

(5) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \cdots$，易见 $x_n = (-1)^n n$ 没有极限.

2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n = \dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$，问 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$ 求出 N，使当 $n > N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε，当 $\varepsilon = 0.001$ 时，求出数 N.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n}=0$.

事实上,要使 $|x_n-0|=\left|\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n}\right|=\dfrac{\left|\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|}{n}<\varepsilon$,只须 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$,则 $\forall\varepsilon>0,\exists N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$,当 $n>N$ 时,总有 $|x_n-0|<\varepsilon$.于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时,可取 $N=[\dfrac{1}{0.001}]=1000$;显然取 N 为大于 1000 的任何整数都可以.

3. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

证　(1) $\forall\varepsilon>0$,欲使 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,只须 $\dfrac{1}{n}<\sqrt{\varepsilon}$,即 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,可取 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,于是对于 $\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,当 $n>N$ 时,总有 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

(2) 由于 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\dfrac{1}{4n}$,$\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$,只须 $\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$ 就行,即 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon}$.

从而 $\forall\varepsilon>0,\exists N=[\dfrac{1}{4\varepsilon}]$,当 $n>N$ 时,总有 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(3) 由于 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\dfrac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\dfrac{a^2}{n}$,

$\forall\varepsilon>0$,欲使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,只须 $\dfrac{a^2}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$,取 $N=[\dfrac{a^2}{\varepsilon}]$,

则当 $n>N$ 时,总有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) 由于 $\left|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1\right|=\dfrac{1}{10^n}<\dfrac{1}{n}$,$\forall\varepsilon>0$,要使 $|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1|<\varepsilon$,只须 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$,取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$.

于是当 $n>N$ 时总有 $\left|0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}-1\right|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$,并举例说明:如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限,但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

证　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,由极限的定义可知,$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $n>N$ 时,总有 $|u_n-a|<\varepsilon$.

而 $||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon$,于是,对上面给定的 $\varepsilon>0,\exists N$,当 $n>N$ 时,总有 $||u_n|-|a||<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

反之,如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限,但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限,例如,对数列 $u_n=(-1)^n$,有

$|u_n| = |(-1)^n| = 1$,且$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 1$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$却不存在.

5. 设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = 0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n = 0$.

证 因已知$\{x_n\}$有界,故 $\exists M > 0$,使得对一切 $n \in N$,总有$|x_n| \leqslant M$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n = 0$,故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$,当 $n > N$时,总有$|y_n - 0| = |y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$,

从而有 $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n = 0$.

6. 对于数列$\{x_n\}$,若 $x_{2k-1} \to a(k \to \infty)$, $x_{2k} \to a(k \to \infty)$,证明:$x_n \to a(n \to \infty)$.

证 因为 $k \to \infty$ 时,$x_{2k-1} \to a$, $x_{2k} \to a$, 故 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists N_1 > 0$,当 $k > N_1$ 时,总有$|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$.

且 $\exists N_2 > 0$,当 $k > N_2$ 时,总有$|x_{2k} - a| < \varepsilon$,

现取 $N = \max\{2N_1 - 1, 2N_2\}$,则当 $n > N$时,总有$|x_n - a| < \varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.

第三节 函数的极限

知识点 · 考点

1. 极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,当$|x| > X$时,恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时,恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. 左极限、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x) = A$.

3. 函数极限的局部保号性定理.

习题 1 - 3 解答

1. 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x - 1) = 8$; (2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x + 2) = 12$;

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$; (4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1 - 4x^2}{2x + 1} = 2$.

证 (1) $\forall \varepsilon > 0$,要使$|3x - 1 - 8| = 3|x - 3| < \varepsilon$,只要$|x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{3}$,取$\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$,则当$0 < |x - 3| < \delta$时,必有$|3x - 1 - 8| < \varepsilon$,从而$\lim\limits_{x\to 3}(3x - 1) = 8$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$,要使$|5x + 2 - 12| = 5|x - 2| < \varepsilon$,只要$|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$.取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$,则当 $0 < |x - 2| < \delta$时,必有$|5x + 2 - 12| < \varepsilon$,从而$\lim\limits_{x\to 2}(5x + 2) = 12$.

(3) $\forall \varepsilon > 0$,要使$\left|\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} + 4\right| = |x + 2| < \varepsilon$,只要取$\delta = \varepsilon$,则当$0 < |x + 2| < \delta$时,必有$\left|\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} - (-4)\right| < \varepsilon$,从而$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$.

(4) $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left|\dfrac{1 - 4x^2}{2x + 1} - 2\right| = |1 - 2x - 2| = 2\left|x - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$, 只要 $\left|x - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,取$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$,则当$0 < \left|x - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| < \delta$时,必有$\left|\dfrac{1 - 4x^2}{2x + 1} - 2\right| < \varepsilon$,

从而 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

2. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证　(1) $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2|x^3|}<\varepsilon$，只要 $|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，取 $X=\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时，必有 $\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

(2) $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，只要 $x>\frac{1}{\varepsilon^2}$，取 $X=\frac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x>X$ 时，必有 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

3. 当 $x\to2$ 时，$y=x^2\to4$. 问 δ 等于多少，则当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$?

解　因为 $x\to2$，所以不妨设 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$，从而 $3<x+2<5$，即 $|x+2|<5$，要使 $|y-4|=|x^2-4|=|x-2||x+2|<5|x-2|<0.001$，只须 $|x-2|<\frac{0.001}{5}=0.0002$，故取 $\delta=0.0002$，则当 $|x-2|<\delta$ 时，必有 $|y-4|<0.001$.

4. 当 $x\to\infty$ 时，$y=\frac{x^2-1}{x^2+3}\to1$. 问 X 等于多少，使当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$?

解　要使 $|y-1|=\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\frac{4}{x^2+3}<0.01$，只须 $x^2>\frac{4}{0.01}-3=397$，即 $|x|>\sqrt{397}$，取 $X=\sqrt{397}$，则当 $|x|>X$ 时，必有 $|y-1|<0.01$.

5. 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to0$ 时极限为零.

证　由 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-x)=0$ 和 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$ 可知，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

6. 求 $f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$ 当 $x\to0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to0$ 时的极限是否存在.

解　$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{x}=1$，$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1$，故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

又 $\varphi(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1$，

$\varphi(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1$，

故 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$ 不存在.

7. 证明：若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

证　因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>0$，当 $x>X_1$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists X_2>0$，当 $x<-X_2$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $X=\max\{X_1,X_2\}$，则当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

8. 根据极限定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证　必要性：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

特别地，当 $0 < x - x_0 < \delta$，即 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，亦有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，故 $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$，即右极限存在.

又当 $0 < x_0 - x < \delta$，即 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，仍有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，故 $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$，即左极限存在.

于是，左、右极限各自存在并且相等.

充分性：若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_1 > 0$，当 $x_0 < x < x_0 + \delta_1$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$；对于上述的 $\varepsilon > 0$，$\exists \delta_2 > 0$，当 $x_0 - \delta_2 < x < x_0$ 时，亦有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，均有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，从而 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

9. 试给出 $x \to \infty$ 时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

证 首先给出定理：如果 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，那么存在常数 $M > 0$ 和 $X > 0$，使得当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x)| \leqslant M$.

因为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，所以取 $\varepsilon = 1$，存在 $X > 0$，当 $|x| > X$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon = 1$，从而 $|f(x)| = |f(x) - A + A| \leqslant |f(x) - A| + |A| < |A| + 1$，记 $M = A + 1$，定理得证.

第四节　无穷小与无穷大

知识点・考点

1. 无穷小　以零为极限的变量称作无穷小量.

无穷小的运算性质：

(1) 有限个无穷小的和仍为无穷小. 有限个无穷小的乘积仍为无穷小. 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.

(2) 求两个无穷小之比的极限时，分子及分母可用等价无穷小来代替.

2. 无穷大　绝对值无限增大的变量叫无穷大.

注意：无穷大与无界变量是两个不同的概念.(见第 6、7 题)

3. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

习题 1 - 4 解答

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小?举例说明.

解 两个无穷小的商不一定是无穷小. 例如当 $x \to 0$ 时，x，$\sin x$，$2x^2$ 都是无穷小. 但 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2x^2} = \infty$. 易见无穷小的商不都是无穷小.

2. 根据定义证明：

(1) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ 当 $x \to 3$ 时为无穷小；(2) $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x \to 0$ 时为无穷小；

证 (1) $\forall \varepsilon > 0$，要使 $\left|\dfrac{x^2 - 9}{x + 3}\right| = |x - 3| < \varepsilon$，只须取 $\delta = \varepsilon$，于是，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时，总有 $\left|\dfrac{x^2 - 9}{x + 3}\right| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = 0$. 故 $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ 当 $x \to 3$ 时为无穷小.

(2) $\forall \varepsilon>0$,要使$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\varepsilon$,只须取$\delta=\varepsilon$,

于是$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<|x-0|<\delta$,总有$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$.故当$x\to0$时,$y=x\sin\frac{1}{x}$为无穷小.

3. 根据定义证明:当$x\to0$时,函数$y=\frac{1+2x}{x}$是无穷大,问x应满足什么条件,能使$|y|>10^4$?

证　$\forall M>0$,要使$\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}+2\right|>\left|\frac{1}{x}\right|-2>M$,只须$\left|\frac{1}{x}\right|>M+2$,即$|x|<\frac{1}{M+2}$,可取$\delta=\frac{1}{M+2}$.

于是$\forall M>0,\exists\delta=\frac{1}{M+2}>0$,当$0<|x-0|<\delta$时,总有$\left|\frac{1+2x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x+2}\right|>M$.故当$x\to0$时,$y=\frac{1+2x}{x}$是无穷大.

由上述证明过程可知:$M=10^4$时,$\delta=\frac{1}{10002}$,故当$0<|x|<\frac{1}{10002}$时,$|y|>10^4$.

4. 求下列极限并说明理由:(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$;(2) $\frac{1-x^2}{1-x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$,

当$x\to\infty$时,$\frac{1}{x}$是无穷小,即$\frac{2x+1}{x}$表示为常数2与无穷小之和,故$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2$.

(2) $\frac{1-x^2}{1-x}=1+x$,

当$x\to0$时,x是无穷小,即$\frac{1-x^2}{1-x}$可表示为常数1与无穷小之和,故$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{1-x}=1$.

5. 根据函数极限或无穷大定义,填写下表:

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x-x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 总有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$ 当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 总有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$ 当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 总有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$ 当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当$0<x-x_0<\delta$时 总有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$ 当$0<x-x_0<\delta$时 总有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$ 当$0<x-x_0<\delta$时 总有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$ 当$0<x-x_0<\delta$时 总有$f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当$0<x_0-x<\delta$时 总有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$ 当$0<x_0-x<\delta$时 总有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$ 当$0<x_0-x<\delta$时 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$ 当$0<x_0-x<\delta$时 $f(x)<-M$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$ 当$\lvert x\rvert>X$时 总有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$ 当$\lvert x\rvert>X$时 皆有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 当$\lvert x\rvert>X$时 总有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 当$\lvert x\rvert>X$时 皆有$f(x)<-M$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$ 当$x>X$时 皆有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$ 当$x>X$时 皆有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 当$x>X$时 皆有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 当$x>X$时 皆有$f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$ 当$x<-X$时 皆有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$ 当$x<-X$时 皆有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 当$x<-X$时 皆有$f(x)>M$时	$\forall M>0,\exists X>0$ 当$x<-X$时 皆有$f(x)<-M$