# 现代逻辑若干问题研究

李娜

Xiandai Luoji Ruogan Wenti Yanjiu

河南大学出版社

本书为国家社会科学基金资助项目
本书获河南大学学术著作和教材出版基金资助

# 现代逻辑若干问题研究

李　娜

河南大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

现代逻辑若干问题研究/李娜. —开封:河南大学出版社,2000.5
ISBN 7-81041-749-5

Ⅰ.现… Ⅱ.李… Ⅲ.逻辑-研究 Ⅳ.B81

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 12009 号

责任编辑:程 庆
责任校对:文 严
装帧设计:刘广祥

出版发行:河南大学出版社
河南省开封市明伦街 85 号 (475001)
0378-2865100
排版:河南大学出版社电脑照排室
印刷:河南第一新华印刷厂
开本:850×1168 1/32
版次:2000 年 6 月第 1 版 印次:2000 年 6 月第 1 次印刷
字数:154 千字 印张:6.125
印数:1—1000 册 定价:8.00 元

# 前　言

本书是作者承担的1996年度国家社会科学基金资助(青年)项目——"现代逻辑中若干重大理论问题的逻辑分析"(批准号:96CZX007)的最终研究成果.它包括两部分内容:(一)哥德尔不完全性定理及其哲学意义;(二)公理集合论中若干重大理论问题的逻辑分析.本书主要是对ZF(Zermelo-Fraenkel)公理系统与选择公理、连续统假设、马丁公理、决定性公理、大基数理论和力迫法之间的关系进行了较为系统的分析.关于这项成果,以下分几个方面介绍给读者.

一、该项目研究的目的和意义

1. 哥德尔不完全性定理及其哲学意义的研究,一直是国内外学者研究的热点问题.本项目对哥德尔不完全性定理及哲学意义的研究,主要是通过作者本人建立的一阶算术系统PQC以及其他一些方法(如配对函数、哥德尔配数法等)来证明哥德尔不完全性定理成立.

2. 关于公理集合论的研究,近30年来发展很快,它的成果正在进入不少其他数学分支领域.但是,目前尚未见到国内外学者对公理集合论中的重大理论问题,如马丁公理、决定性公理等进行系统的逻辑分析.本课题的研究弥补了这一缺陷.

因此,本课题的研究具有一定的开拓性.它一方面从理论上扩展了现代逻辑中若干重大理论问题的研究,使现代逻辑更加丰富.另一方面,又可以将它应用于计算机模拟人的思维,为人工智能开辟新的视野.

二、该研究成果的主要内容、重要观点和对策建设

在此之前,布尔值模型方法只适用于公理集合论的ZF系统,即只定义了集合公式$x\in y$和$x=y$的布尔值:

$$\| x \in y \| = \sum_{u \in \mathrm{dom}(y)} [\| u = x \| \cdot y(u)],$$

$$\| x = y \| = \prod_{u \in \mathrm{dom}(x)} [x(u) \Rightarrow \| u \in y \|] \cdot \prod_{v \in \mathrm{dom}(y)} [y(v) \Rightarrow \| v \in x \|].$$

这里的 $x$ 和 $y$ 都是集合. 本研究成果推广了布尔值模型方法，定义了类公式 $x \in Y$ 的布尔值：

$$\| x \in Y \| = \sum_{w \in Y} \| x = w \|.$$

这里的 $x$ 是一个集合，而 $Y$ 是一个类. 在此基础上，建立了模型 $\Delta^B$（$B$ 是一个完全的布尔代数），证明了 $\Delta^B$ 是公理集合论的 GB 的（Gödel-Bernays）系统的布尔值模型.

三、该成果的学术价值、实践意义和社会影响

本成果是具有一定的创造性、较高水平和有重要意义的基础性研究. 它一方面从理论上扩展了现代逻辑中，特别是公理集合论中若干重大理论问题的研究，使现代逻辑更加丰富. 另一方面，它对于我国逻辑学研究的深入和发展将起到积极的推动作用，对于逻辑学研究的现代化也将起到一定的促进作用. 与此同时，作为基础理论的研究，本成果又注意到这些基本理论的应用. 如在连续统假设的逻辑分析一章中，讨论了连续统假设在离散空间的 $\omega$ 的 Stone-Čech 紧化 $\beta\omega$ 研究中的应用，即应用连续统假设证明了 $\beta\omega \backslash \omega$ 特征的独立性问题. 在马丁公理的逻辑分析一章中，还讨论了马丁公理在现代数学发展中的作用，其中主要包括马丁公理在代数学、分析数学和集论拓扑等学科中的应用.

四、该研究成果及研究方法的特色、突破和建树

本研究成果的内容以及研究方法难度大、方法新、准确并有自己的创见，还对所研究问题在哲学背景、发展线索、应用等方面作了一定的讨论.

1. 难度大

本研究成果讨论和研究的问题都是现代逻辑中难度较大的问题，如哥德尔不完全性定理的证明、选择公理、连续统假设、马丁公理、决定性公理、大基数理论和力迫法都是数理逻辑或公理集合论中难度大的问题.

2. 方法新

本研究成果使用的方法，不是传统的思辩方法，而是近若干年发展起来的新方法，即现代逻辑的方法，如布尔值模型方法和力迫法等等.

3. 准确

本研究成果在理论的阐述、定理的证明等方面充分体现了这一特点.

4. 有自己的研究成果

本研究成果包括了课题组成员近几年在现代逻辑，特别是公理集合论方面的研究中所取得的一些有较大价值的研究成果. 例如：

(1) 定义了类公式 $x\in Y$ 的布尔值：

$$\| x \in Y \| = \sum_{w\in Y} \| x = w \| ,$$

这里的 $x$ 是一个集合，$Y$ 是一个类.

(2) 建立了模型 $\Delta^B$($B$ 是一个完全的布尔代数)，证明了 $\Delta^B$ 是公理集合论的 GB 系统的布尔值模型. 另外，还证明了：

① 连续统假设的相对协调性；

② 连续统假设的相对独立性；

③ 在模型 $\Delta^B$ 上建立了力迫概念，并讨论了力迫的一些基本性质，最后证明了力迫定理和兼纳模型定理.

(3) 讨论了有真类的力迫. 即：令 $\mathscr{M}$ 是 GB 的传递模型，当力迫概念$(P,<)$是一真类时，对每个基数 $\lambda$，定义

$$P_\lambda = P\bigcap \mathscr{M} \bigcap P(V_\lambda),$$

这里的 $V_\lambda$ 满足 $\bigcup_\lambda V_\lambda = V$，并且 $P = \bigcup_\lambda P_\lambda$，$P_\lambda \subseteq P_\mu$（当 $\lambda \leqslant \mu$ 时）.

令 $B_\lambda = \text{r. o. } (P_\lambda)$（$B$ 是一个完全的布尔代数），则

$$B = \bigcup_\lambda B_\lambda = \bigcup_\lambda \text{r. o. } (P_\lambda) = \text{r. o. } (\bigcup_\lambda P_\lambda) = \text{r. o. } (P),$$

这里的 $B$ 是 $\mathscr{M}$ 中的一个真类，并且它还具有一个完全的布尔代数的所有性质. 另外，在 $\mathscr{M}$ 中：

① 构造了布尔值模型 $\Delta^B$（$B$ 是一个布尔真类）；

② 定义了公式 $x \in Y$ 的布尔值 $\| x \in Y \|$：如果 $x, Y \in \Delta^{B_\lambda}$ 并且 $\lambda \leqslant \mu$，则

$$\| x \in Y \|_{B_\lambda} = \| x \in Y \|_{B_\mu}.$$

于是，令

$$\| x \in Y \| = \| x \in Y \|_{B_\lambda}.$$

特别地，我们仍然可以证明与之相应的力迫定理和兼纳模型定理成立.

本书各章可以独立阅读.

希望本书能引起读者的兴趣和对逻辑学研究的关心. 书中难免存在缺点和不足，欢迎读者批评指正.

最后，特别感谢河南大学学术著作和教材出版基金委员会、河南大学出版社以及本书的责任编辑程庆同志. 他们在学术著作出版困难的今天，为本书的出版作了很大的努力，终于使本书与读者见面. 作者在此深表谢意.

作者

1999. 9

# 目　　录

## 第　一　篇
## 哥德尔不完全性定理及其哲学意义



## 第　二　篇
## 公理集合论中若干重大理论问题的逻辑分析

# 第一篇

# 哥德尔不完全性定理及其哲学意义

1931 年，K. 哥德尔(Gödel)完成并发表了他的重要论文《论〈数学原理〉及其相关系统的形式不可判定命题》. 1934 年春，哥德尔在普林斯顿高等学校研究院发表了题为《论形式数学系统的不可判定命题》的著名讲演，对他 1931 年的论文作了改进、补充和发展.

哥德尔的这篇文章给出了一个形式数论的不完全性结果. 他针对 A. N. 怀德海(Whitehead)和 B. A. W. 罗素(Russell)合著的《数学原理》中的形式系统 $P$ 证明了：如果 $P$ 是一致的，那么存在一算术的形式命题 $A$(即 $A$ 为 $P$ 中一命题)，并且 $A$ 与 $\neg A$ 在 $P$ 中都是不可证明的. 也就是说，在一个包含初等数论的一致的形式系统中，存在着一个不可判定命题，该命题本身和它的否定命题都不是这个系统的定理. 这一结果被后人称为哥德尔第一不完全性定理. 这一定理还有以下几种等价的说法：

**哥德尔不完全性定理** 存在一个算术语句 $A$，$A$ 在算术标准模型 $\mathcal{N}=\langle \mathbf{N},0,',+,\cdot\rangle$ 中为真，但 $A$ 在 $P$ 中不可证.

**哥德尔不完全性定理** 存在一个算术语句 $A$，$A$ 和 $\neg A$ 在 $P$ 中都不可证.

**哥德尔不完全性定理** 存在 $P$ 的可数模型 $\mathscr{U}$，$\mathscr{U}$ 与 $\mathcal{N}$ 不是初等等价的.

**哥德尔不完全性定理** $P$ 的全体闭定理所组成的集合不是极大一致的句子集.

哥德尔在这篇文章中还提出了一个更强的结果：如果 $P$ 一致，则 $P$ 的一致性不能在 $P$ 内证明(这一结果也适用于比 $P$ 更强的形式理论，如 ZF). 这条定理的意义更为深远，通常被称为哥德尔第二不完全性定理.

哥德尔的这些结论与 D. 希尔伯特(Hilbert)的猜想完全相反. 希尔伯特猜想：G. 皮亚诺(Peano)算术系统 $P$ 是完全的，它的命题集可分为两部分：一部分是 $P$ 的定理集 $T$(即其中每一元素都是 $P$

的定理)，另一部分是 $P$ 的可否证集 $R$(即其中每一元素的否命题都是 $P$ 的定理). 希尔伯特还猜想：系统 $P$ 的命题集 $S$ 恰好就是 $T$ 与 $R$ 的并集，即 $S=T\cup R$. 这就是说，希尔伯特认为：由 $P$ 的完全性，皮亚诺公理系统才完全刻画了算术系统. 但是，哥德尔的不完全性定理表明了形式化的局限性，否定了希尔伯特的猜想，从而否定了希尔伯特方案. 哥德尔证明了：存在一个命题 $A$，$A$ 和它的否定 $\neg A$ 都不在 $T$ 中，也不在 $R$ 中. 也就是说，$P$ 的命题集合不可能按照其中元素(即命题)是可证的或可否证的原则将其分为两部分，即 $T\cup R$ 真包含在 $S$ 中. 这也表明：存在一真实的数学命题，它在系统内不可证.

为了证明不完全性定理，哥德尔区分了形式系统内外等几个层次和它们之间的联系. 不完全性定理的证明大致可分为以下三步：

第一步：建立一阶形式算术系统(这里形式系统的概念是使用元数学概念建立起来的)，并把这一系统的初始符号、公式和证明都枚举出来. 特别地，设想只含一个自由变元的那些公式(也称性质)已经有一个枚举.

第二步：把元数学概念通过配数方法给出算术化的处理，并证明这些函数与关系是原始递归的. 在此之前，R. 戴德金(Dedekind)、T. 司寇伦(Skolem)、希尔伯特和 W. 阿克曼(Ackermann)都研究过原始递归函数，但哥德尔给这类函数下了第一个准确的定义，并从此被视为标准定义.

第三步：引入原始递归谓词，并把它推广为可判定谓词，证明原始递归函数与原始递归谓词(关系)在形式系统内部都是数字可表示的，从而证明所构造的命题 $A(z_p)$ 是不可判定的.

# 第一章　哥德尔不完全性定理证明的主要过程

## §1　建立一阶形式数论系统

哥德尔采用的系统，可以用下面的系统来替换，这个系统比 $P$ 更严格.

(1) 初始符号

① 可数无穷多个个体变元：$v_1, v_2, v_3, \cdots$（以后用小写拉丁字母 $x, y, z, \cdots$（可以加上、下标）表示任何个体变元）；

② 逻辑联结词：$\neg$（并非），$\vee$（…或者…）；

③ 量词：$(\forall)$（任何），$(\exists)$（存在）；

④ 等词：$=$；

⑤ 常项：**0**；

⑥ 一元函数符号：$'$（后继函数）；

⑦ 二元函数符号：$+$（加），$\cdot$（乘）；

⑧ 括号：(，).

(2) 项（以下用小写拉丁字母 $r, s, t, \cdots$（可以加上、下标）表示任何项）

① **0** 是项；

② 单个（个体）变元是项；

③ 如果 $s$ 是项，则 $(s')$ 是项；

④ 如果 $s$ 和 $t$ 是项，则 $(s+t)$ 是项；

⑤ 如果 $s$ 和 $t$ 是项，则$(s \cdot t)$是项；

⑥ 只有适合以上①～⑤条的符号序列才是项.

(3) 公式(以下用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$(可以加上、下标)表示任何公式)

① 如果 $s$ 和 $t$ 是项，则$(s=t)$是公式(称为原子公式)；

② 如果 $A$ 是公式，则$(\neg A)$是公式(称为 $A$ 的否定式)；

③ 如果 $A$ 和 $B$ 是公式，则$(A \vee B)$是公式(称为 $A$ 和 $B$ 的析取式)；

④ 如果 $A(x)$是公式，$x$ 是变元，并且 $x$ 在 $A$ 中自由，则$(\forall x)A(x)$和$(\exists x)A(x)$都是公式(称$(\forall x)A(x)$为全称式，$(\exists x)A(x)$为存在式)；

⑤ 只有适合以上①～④条的符号序列才是公式.

项 $t$ 的复杂度 $\deg(t)$是 $t$ 中函数符号($'$，$+$，$\cdot$)的个数，公式 $A$ 的复杂度 $\deg(A)$是 $A$ 中$\forall$，$\exists$，$\neg$和$\vee$的总个数.

(4) 定义

① $(A \to B)$被定义为$(\neg A \vee B)$；

② $(A \wedge B)$被定义为$\neg(\neg A \vee \neg B)$；

③ $(A \leftrightarrow B)$被定义为$((A \to B) \wedge (B \to A))$.

(5) 公理

① 带等词的一阶谓词演算的公理(模式)：

$A_1: A \vee A \to A$；

$A_2: A \to A \vee B$；

$A_3: A \vee B \to B \vee A$；

$A_4: (B \to C) \to (A \vee B \to A \vee C)$；

$A_5: (\forall x)A(x) \to A(t)$ ($t$ 是任意的项)；

$A_6: A(t) \to (\exists x)A(x)$ ($t$ 是任意的项)；

$A_7: t=t$ ($t$ 是任意的项)；

$A_8: s=s_1 \to t=t_1 \to s=t \to s_1=t_1$($s,s_1,t,t_1$ 是任意的项)；

$A_9: s=t\to s'=t'$ ($s,t$ 是任意的项)；

$A_{10}: s=s_1\to t=t_1\to s+t=s_1+t_1$ ($s,s_1,t,t_1$ 是任意的项)；

$A_{11}: s=s_1\to t=t_1\to s\cdot t=s_1\cdot t_1$ ($s,s_1,t,t_1$ 是任意的项).

② 皮亚诺算术公理

$N_1: (\forall x)\neg(\mathbf{0}=x)$；

$N_2: (\forall x)(\forall y)(x'=y'\to x=y)$；

$N_3: (\forall x)(x+\mathbf{0}=x)$；

$N_4: (\forall x)(\forall y)(x+y'=(x+y)')$；

$N_5: (\forall x)(x\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0})$；

$N_6: (\forall x)(\forall y)(x\cdot y'=x\cdot y+x)$；

$N_7: A(\mathbf{0})\wedge((\forall x)A(x)\to A(x'))\to(\forall x)A(x)$.

(6) 推理规则

$R_1$(前件存在)：由 $A(t/x)\to B$ 可得 $(\exists x)A(x)\to B$，$t$ 不在 $(\exists x)A(x)$ 和 $B$ 中自由出现；

$R_2$(后件概括)：由 $B\to A(t/x)$ 可得 $B\to(\forall x)A$，$t$ 不在 $(\forall x)A(x)$ 和 $B$ 中自由出现；

$R_3$(MP)：由 $A$ 和 $A\to B$ 可得 $B$.

其中 $A(t/x)$ 是将 $A(x)$ 中所含 $x$ 都换为 $t$ 的结果.

至此，我们在带等词的一阶谓词演算 QC(见文献[9])的基础上，建立了一阶形式数论系统 PQC，其中皮亚诺算术公理有 7 条. $N_1$ 是说 $\mathbf{0}$ 不是任何数的后继，$N_2$ 表示任何两个数的后继都不相同，$N_3$ 和 $N_4$ 是加法的递归定义，$N_5$ 和 $N_6$ 是乘法的递归定义，$N_7$ 是归纳公理模式.

下面我们给出 PQC 系统中的证明和演绎.

所谓 PQC-证明，指的是一个有穷的公式序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 对每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，$A_k$ 或者是

① 一条公理(逻辑公理或皮亚诺算术公理)，或者是

② 由 $A_i$ 和 $A_j$ 用 MP 得到的(此时 $A_j$ 形如 $A_i \to A_k$),或者是

③ 由 $i(i<k)$ 用前件存在规则或后件概括规则得到的.

如果 $A$ 是某个 PQC-证明的最后一个公式,则称 $A$ 是 PQC-定理,记作

$$\mathrm{PQC} \vdash A \quad \text{或者} \quad \vdash_{\mathrm{PQC}} A.$$

在不引起混淆时,PQC 可以省略.

设 $\Phi$ 是一个 $L$-公式集. 所谓从 $\Phi$ 作出的一个 PQC-演绎,指的是一个有穷的公式序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,对每个 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$,$A_k$ 或者是

① PQC-定理,或者是

② $A_k \in \Phi$,或者是

③ 由 $A_i$ 和 $A_j(1 \leqslant i, j < k)$ 用 MP 规则得到的(此时 $A_j$ 形如 $A_i \to A_k$).

如果存在一个从 $\Phi$ 作出的 PQC-演绎的最后一个公式是 $A$,则称由 $\Phi$ 可演绎出 $A$,记作 $\Phi \vdash_{\mathrm{PQC}} A$. 在不引起混淆时,下标 PQC 可以省略. 容易证明

**演绎定理** $\Phi \cup \{B\} \vdash A$ 当且仅当 $\Phi \vdash B \to A$.

## §2 关于 PQC 的算术定理

关于 PQC 的一阶逻辑定理参见文献[9]的第三章和第四章,PQC 的算术定理及证明如下:

(1) $\vdash \neg(\mathbf{0}=t)$

**证明**:① $(\forall x)\neg(\mathbf{0}=x)\to\neg(\mathbf{0}=t)$; $(A_5)$

② $(\forall x)\neg(\mathbf{0}=x)$; $(N_1)$

③ $\neg(\mathbf{0}=t)$. (①,②MP)

(2) $\vdash s'=t'\to s=t$

**证明**:① $(\forall x)(\forall y)(x'=y'\to x=y)$