华章数学译丛

HZ BOOKS

22

PEARSON Prentice Hall

A First Course in Probability

(Sixth Edition)

概率论基础教程

（原书第6版）

（美）Sheldon Ross 著
南加州大学
赵选民 等译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

22

A First Course in Probability

(Sixth Edition)

概率论基础教程

(原书第6版)

(美) Sheldon Ross 著
南加州大学

赵选民 等译

机械工业出版社
China Machine Press

本书系统介绍了概率论的基础理论及应用，主要内容包括组合分析、概率论的公理、条件概率与独立性、随机变量及其分布、数学期望、极限定理、随机模拟等. 另外，作者精心选择了大量的例题和习题，揭示了概率论在各个领域的广泛应用.

本书通俗易懂，可作为高等院校相关专业概率论课程的教材或教学参考书.

本书版权登记号：图字：01-2004-2894

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论基础教程(原书第 6 版)/(美)罗斯(Ross,S.)著；赵选民等译. 一北京：机械工业出版社，2006.4

(华章数学译丛)

书名原文：A First Course in Probability, Sixth Edition

ISBN 7-111-18378-9

Ⅰ. 概…　Ⅱ. ①罗…　②赵…　Ⅲ. 概率论一教材　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 004680 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037)

责任编辑：迟振春

北京牛山世兴印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2006 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

787mm×1020mm 1/16 · 23.25 印张

定价：42.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

概率论是研究随机现象规律的数学分支，始于20世纪30年代，其发展源于它自身逻辑基础的建立和科学技术、社会实践的许多实际需要. 现在概率论不仅在随机过程、随机分析和极限理论等领域受到广泛关注，而且数理统计、数理金融和生物数学等学科也都密切地与概率论的发展相联系.

本书是一本概率论的入门教材，在取材、结构和写作方法等方面具有鲜明的特点. 通过例题阐述概率论的基本概念与方法是本书的一大特色，作者独具匠心地选择和编排了大量例题与习题，这些内容约占全书的三分之二. 通过这些例题和习题，读者可以了解概率论在各个领域的广泛应用.

本书通俗易懂，但又不失其科学性、严密性与准确性. 对于初学者来说，既能较准确地掌握概率论的基本概念与方法，又不致苦于较深的数学推导所带来的困难与乏味. 正如作者在前言中所说. 本书可作为高等院校数学、统计学、工程技术以及其他科学（包括计算机科学、社会科学和管理科学）的学生概率论课程的教材或教学参考书，也可供具备初等微积分知识的读者自学参考.

在翻译过程中，我们在忠实原文的基础上，努力使之便于我国读者理解，另外，我们部分地参考了李漳南和杨振明教授于1980年翻译的本书前版，当时的书名为《概率论初级教程》（人民教育出版社），在此谨表谢意.

本书由赵选民主译，另外张未未、李艳玲、苗宇涛、李娟、崔艳丽、解俊山也参加了部分翻译与录入工作. 由于译者水平有限，难免存在不妥之处，敬请广大读者不吝赐教.

译 者

前　言

著名的法国数学家和天文学家（曾被称为“法国的牛顿”）皮埃尔·西蒙·拉普拉斯侯爵曾说过：“我们发现，概率论实质上就是被归纳为计算问题的常识，它使我们能正确地评价凭某种直觉所感受到的、往往又不能解释清楚的见解的合理性……值得注意的是，概率论这门起源于机会游戏的科学，终将成为人类知识中最重要的组成部分……对于大多数人来说，生活中最重要的问题正是概率问题.”尽管许多人可能会认为，这位曾对概率论的发展做出巨大贡献的侯爵的话有点言过其实，但是，概率论确实已经成为几乎所有的科学家、工程师、医生、律师和实业家手中的一个有力的基本工具. 事实上，有知识的人已经学会问“是这样的概率有多大?”而不问“是这样的吗?”

本书是一本概率论的入门教材，适用于具有初等微积分必备知识的数学、统计学、工程技术以及其他科学（包括计算机科学、社会科学和管理科学）的学生，本书不仅介绍了概率的数学理论，而且通过大量的例子来说明它的许多不同的应用.

第 1 章介绍组合分析的基本原理，这在计算概率时很有用.

第 2 章研究概率论的公理，并说明如何应用这些公理计算各种有趣的概率.

第 3 章论述条件概率与事件独立性的一些极其重要的主题. 通过一系列的例题说明：在只有部分信息可利用时，条件概率如何发挥作用；而且即使没有部分信息可利用时，条件概率作为一种工具也可以使我们能比较容易地算出概率. 借助“设置条件”获得概率这一极为重要的技巧在第 7 章中会重新提到，在那里我们用它来计算数学期望.

第 4、5、6 章介绍随机变量的概念. 第 4 章介绍离散型随机变量，第 5 章介绍连续型随机变量，随机变量的联合分布在第 6 章讨论. 随机变量的数学期望和方差等重要概念在第 4 章和第 5 章中介绍，然后对很多常见类型的随机变量确定这两个量的值.

第 7 章介绍数学期望的其他性质. 列举许多例题来说明随机变量和的数学期望等于它们的数学期望之和，这一结果是非常有用的. 有关条件期望的几节，包括它在预测中的运用和矩母函数都在这一章. 另外，在最后一节还介绍了多元正态分布并给出了一个关于多元正态分布的样本均值和样本方差的联合分布的简单证明.

第 8 章阐述概率论中主要的理论结果. 特别证明强大数定律和中心极限定理，其中对强大数定律的证明相对简单，即假设随机变量有有限的四阶矩，而对中心极限定理的证明是建立在莱维连续性定理的假设基础之上的. 另外，本章还给出诸如马尔可夫不等式、切比雪夫不等式、车尔诺夫界等概率不等式. 第 8 章的最后一节给出一个误差的界，此误差为独立的伯努利随机变量之和的概率由具有相同期望值的泊松随机变量的相应概率逼近时的误差.

第 9 章介绍一些补充主题，例如马尔可夫链、泊松过程、信息和编码论. 第 10 章讨论模拟.

第 6 版继续对本书的内容进行了改进和调整，添加了许多新练习和例题. 添加的例题包括有效性例题（第 4 章的例 4c）、正态逼近例题（第 5 章的例 4i）、对数正态分布在金融中的应用例题（第 6 章的例 3d），以及不等概率的票券收集例题（第 7 章中的例 2v）. 第 7 章还增加了几小节，讨论概率方法（7.2.1 节）和最大-最小恒等式（7.2.2 节）.

与前一版一样，每章最后都有三组习题. 它们分别为“习题”、“理论练习”和“自测题与练习”，最后一组习题的详细答案在附录 B 中，这样设计是为了帮助学生测试理解能力和学

习效果.

包括前几版的“概率模型”软盘在内的所有材料均可以从 Ross 网站上下载，网址为 http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/ross. 使用这个网站，可以让学生们在以下六个重要内容上快速容易地计算和模拟：

- 其中的三个模块可以分别导出二项随机变量、泊松随机变量和正态随机变量的概率.
- 另一模块解释了中心极限定理. 它考虑取值为 0，1，2，3，4 之一的随机变量，并允许用户输入这些值的概率和一个数 n，模块则画出这种类型的 n 个独立随机变量之和的概率质量函数. 增大 n 值，可以“看到”质量函数收敛于一个正态密度函数.
- 另外两个模块解释了强大数定律. 同样，用户输入随机变量的 5 个可能值的概率以及一个整数 n，程序则用随机数来模拟具有指定分布的 n 个随机变量. 模块画出每一个结果发生的次数和所有结果发生的平均次数的图. 各个模块对试验结果如何画图是不同的.

我们非常感谢以下审阅者对此书的最近几版提出的有价值的意见和建议：Anastasia Ivanova，北卡罗来纳大学；Richard Bass，康涅狄格大学；Ed Wheeler，田纳西大学；Jean Cadet，纽约州立大学 SUNY 分校；Stony Brook；Jim Propp，威斯康星大学；Mike Hardy，麻省理工学院；Anant Godbole，密歇根技术大学；Zakkula Govindarajulu，肯塔基大学；Richard Groeneveld，艾奥瓦州立大学；Bernard Harris，威斯康星大学；Stephen Herschkorn，拉特格大学；Robert Keener，密歇根大学；Thomas Liggett，加利福尼亚大学洛杉矶分校；Bill McCormick，佐治亚大学；Kathryn Prewitt，亚利桑那州立大学. 特别感谢 Hossein Hamedani（马科萨斯大学）和 Ben Perles 对原稿进行认真核对.

在此还要对早期版本的审阅者表示感谢：Thomas R. Fischer，得克萨斯 A & M 大学；Jay DeVore，加州工业大学 San Luis Obispo 分校；Robb J. Muirhead，密歇根大学；David Heath，康奈尔大学；Myra Samuels，普度大学；I. R. Savage，耶鲁大学；R. Miller，斯坦福大学；K. B. Athreya，艾奥瓦州立大学；Phillip Beckwith，密歇根科技大学；Howard Bird，圣克劳德州立大学；Steven Chiappari，圣克拉大学；James Clay，亚利桑那大学图森分校；Francis Conlan，圣克拉大学；Fred Leysieffer，佛罗里达州立大学；Ian McKeague，佛罗里达州立大学；Helmut Mayer，佐治亚大学；N. U. Prabhu，康奈尔大学；Art Schwartz，密歇根大学安拉伯分校；Therese Shelton，西南大学；Allen Webster，布雷德利大学.

目　录

第1章 组合分析

1.1 引言

这是一个典型的涉及概率的有趣问题. 一个通信系统由 n 个看似一样的天线组成，这些天线要以线性顺序排列. 合成系统可以接收所有的信号(称为实用的)，只要没有两个相连的天线发生故障. 如果结果表明 n 个天线中有 m 个是有缺陷的，那么合成系统实用的概率有多大? 例如，令 $n=4$，$m=2$，则有 6 种可能的构形，即

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

其中 1 表示天线正常，0 表示天线有缺陷. 由于合成系统在前三种排列中是实用的，而在后三种排列中不是实用的，所以取 $3/6=1/2$ 作为要求的概率似乎是合理的. 对于一般的 n，m，也可以用同样的方法计算系统实用的概率，即计算出系统中结果实用的构形数，然后除以所有可能的构形数.

从前面可以看到，找到一个计算事件发生方式的数目的有效方法是非常有用的. 事实上，概率论中的很多问题都可以简单地通过计算某特定事件能以几种不同方式发生的数目得以解决. 这种计算的数学理论通称为组合分析. 1

1.2 计数基本原理

下面的计数原理是我们所有工作的基础. 简单来说，如果一个试验可以产生 m 个可能结果，而另一个试验可以产生 n 个可能结果，那么这两个试验就有 mn 个可能结果.

计数基本原理 *假设有两个试验，若试验 1 可以产生 m 个可能结果，而对于试验 1 的每一个可能结果，试验 2 都有 n 个可能结果，则这两个试验一共有 mn 个可能结果.*

基本原理的证明 为得到此原理的证明，现将两个试验的全部可能结果列举如下：

$$\begin{array}{c} (1,1),(1,2),\cdots,(1,n) \\ (2,1),(2,2),\cdots,(2,n) \\ \vdots \\ (m,1),(m,2),\cdots,(m,n) \end{array}$$

其中结果(i, j)表示试验 1 得到它的第 i 个可能结果，试验 2 得到它的第 j 个可能结果. 因此，两个试验的可能结果的集合由 m 行组成，每行含 n 个元素. 故结论得证. ■

例 2a 一个小社区有 10 个妇女，每个妇女有 3 个孩子，如果其中一个妇女和她其中的一个孩子被选为本年的母子，那么有多少种不同的选择?

解 把对妇女的选择作为试验 1 的结果，随后对她的孩子的选择作为试验 2 的结果，由基本原理有 $10\times3=30$ 种可能的结果. ■

其中若进行两个以上的试验，基本原理被推广如下.

推广的计数基本原理 如果做 r 个试验，第一个试验有 n_1 个可能结果，对其每一个可能结
2 果试验 2 对应有 n_2 个可能结果，若对前两个试验的每一个可能结果，第三个试验对应有 n_3 个可能结果，……，那么这 r 个试验一共有 $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ 个可能结果.

例 2b 某学院计划委员会由 3 名新生、4 名二年级学生、5 名三年级学生、2 名四年级学生组成，现从该委员会中选各年级 1 人组成 4 人小组委员会，问有多少种不同的选法？

解 我们可以把小组委员会的选择作为从每个年级抽取一名代表的四个独立试验的组合结果，从而由推广的计数基本原理有 $3\times4\times5\times2=120$ 种选法. ■

例 2c 如果前 3 个位置用字母、后 4 个位置用数字，那么有多少个不同的 7 位牌照？

解 由推广的计数基本原理，答案是 $26\cdot26\cdot26\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=175\,760\,000$. ■

例 2d 如果每一个函数值都取 0 或 1，那么定义在 n 个点上的函数有多少个？

解 设这 n 个点分别是 $1, 2, \cdots, n$，因为对每一个 $i=1, 2, \cdots, n$，$f(i)$ 都等于 0 或者 1，所以有 2^n 种可能的函数. ■

例 2e 在例 2c 中，若字母和数字都不允许重复，那么有多少个牌照？

解 有 $26\cdot25\cdot24\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7=78\,624\,000$ 个牌照. ■

1.3 排列

将字母 a, b, c 排成有次序的一列，问有多少种不同的排列？由直接列举法可知有 6 种，即 abc, acb, bac, bca, cab, cba，我们把其中的每一个称为一个排列. 于是包括 3 个对象的集合有 6 种可能的排列. 此结论也可以由计数基本原理推出，因为排列的第一个对象可以是 3 个对象中的任何一个，排列的第二个对象可以从余下的 2 个对象中选出任何一个，而排列的第三个对象只能是剩下的 1 个，因此有 $3\cdot2\cdot1=6$ 种可能排列.

现设有 n 个对象，类似上面的推理可得，这 n 个对象有

$$n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

3 种不同的排列.

例 3a 由 9 人组成的棒球队有多少种击球次序？

解 有 $9!=362\,880$ 种可能的击球次序. ■

例 3b 某概率论班共有 6 名男生与 4 名女生，举行一次测验后将他们按成绩排队. 假定他们的分数各不相同，试问：

(a) 可能有多少种排法？

(b) 如果将男、女生分开各自排队，可能有多少种不同的排法？

解 (a) 因为每一队都对应一个包括 10 个人的有次序的排列，从而此题的答案为 $10!=3\,628\,800$.

(b) 因为男生有 $6!$ 种排列，女生有 $4!$ 种排列，从而由基本计数原理得可能有 $(6!)(4!)=(720)(24)=17\,280$ 种排法. ■

例 3c 琼斯有 10 本书，其中数学书 4 本，化学书 3 本，历史书 2 本，语文书 1 本，琼斯打算把他的书摆在书架上，若要求同类的书放在一起，问可能有多少种不同的摆法？

解 把数学书摆在前面，接着是化学书，然后是历史书，最后是语文书，共有 $4!\,3!\,2!\,1!$ 种摆法. 类似地，对每一种书类的次序都有 $4!\,3!\,2!\,1!$ 种摆法，由于书类又有 $4!$ 种次序，

故所求的答案是4！4！3！2！1！=6 912. ■

现在我们来计算当有一些对象彼此不加区别时，含有 n 个对象的集合的排列数. 为直观起见，考虑如下例子.

例 3d 用字母 $PEPPER$ 可以组成多少种不同的字母排列？

解 首先我们指出，若 3 个 P 之间和 2 个 E 之间彼此加以区别，则字母 $P_1E_1P_2P_3E_2R$ 共有 6！种排列. 然而，考虑这些排列中的任何一个，例如 $P_1P_2E_1P_3E_2R$，若在 P 与 P 之间、E 与 E 之间交换位置，则所得的排列仍将是 $PPEPER$ 型的，也就是说，3！2！个排列 4

$$\begin{array}{ll} P_1P_2E_1P_3E_2R & P_1P_2E_2P_3E_1R \\ P_1P_3E_1P_2E_2R & P_1P_3E_2P_2E_1R \\ P_2P_1E_1P_3E_2R & P_2P_1E_2P_3E_1R \\ P_2P_3E_1P_1E_2R & P_2P_3E_2P_1E_1R \\ P_3P_1E_1P_2E_2R & P_3P_1E_2P_2E_1R \\ P_3P_2E_1P_1E_2R & P_3P_2E_2P_1E_1R \end{array}$$

都是 $PPEPER$ 型的. 因此，字母 $PEPPER$ 有 6！/(3！2！)=60 种可能的排列. ■

一般地，运用例 3d 的推理可证：若 n 个对象中有 n_1 个对象彼此不加区别，另 n_2 个对象彼此不加区别，……，另 n_r 个对象彼此不加区别，则总共有

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_r!}$$

种不同排列.

例 3e 一次国际象棋比赛有 10 名选手，其中 4 名俄罗斯人，3 名美国人，2 名英国人，1 名巴西人，如果比赛结果的次序正好是选手国籍的次序，那么有多少种可能的结果？

解 有 $\dfrac{10!}{4!\ 3!\ 2!\ 1!}=12\,600$ 种可能的结果. ■

例 3f 一组旗由 4 面白旗、3 面红旗、2 面蓝旗组成，并认为颜色相同的旗子是一样的，那么这 9 面旗子排成一行可以形成多少种不同的记号？

解 有 $\dfrac{9!}{4!\ 3!\ 2!}=1\,260$ 种不同的记号. ■

1.4 组合

我们经常要计算从 n 个对象中取出的、包括 r 个对象的不同组的数目. 例如，从 A，B，C，D 和 E 这五项中取出三项为一组，可能有多少不同的组？为回答这个问题，可进行如下推理：由于选择第一项有 5 种方法，然后选第二项有 4 种方法，再选第三项有 3 种方法，故若考虑项目被选取的次序，则选取含三项的组有 5·4·3 种方法. 但此时每个由某三项组成的组，例如由 A，B 和 C 组成的组，都被计数 6 次(也就是说，若考虑选取次序，排列 ABC，ACB，BAC，BCA，CAB，CBA 全要算上)，由此可见，总共能组成 5

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}=10$$

个不同的组.

一般地，由于考虑选取次序时，从 n 项中选取 r 项为一组，共有 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同选法，而这时每个含 r 项的组全被计数 r！次，故由一个包含 n 项的集合中取出 r 项所组成

的不同的组数应是

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

记号与术语 对 $r\leqslant n$，我们定义

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

并称 $\binom{n}{r}$ 为从 n 个对象中一次取出 r 个的可能组合数. ⊖

于是，$\binom{n}{r}$ 表示不考虑选取次序时，从一个包含 n 个对象的集合中取出的、包括 r 个对象的不同组的数目.

例 4a 从 20 个人中选 3 人组成一个委员会，问有多少种选法？

6 **解** 有 $\binom{20}{3}=\frac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2\cdot1}=1\,140$ 种可能选法. ■

例 4b 从 5 个女人与 7 个男人中选 2 女 3 男组成一个委员会，有多少种不同的选法？如果其中有 2 个男人长期不和，不能同时进入委员会，那么又有多少种选法？

解 由于 2 个女人有 $\binom{5}{2}$ 种选法，3 个男人有 $\binom{7}{3}$ 种选法，从而由计数基本原理知由 2 女 3 男组成的委员会共有

$$\binom{5}{2}\binom{7}{3}=\left(\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\right)\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=350$$

种选法.

另外，如果其中 2 个男人拒绝一起进入委员会，那么 3 个男人中不包括 2 个不和男人中的任意一个有 $\binom{2}{0}\binom{5}{3}$ 种选法，3 个男人中仅包括 2 个不和男人中的一个有 $\binom{2}{1}\binom{5}{2}$ 种选法，这就是说不同时包括两个不和男人的 3 个男人有 $\binom{2}{0}\binom{5}{3}+\binom{2}{1}\binom{5}{2}=30$ 种选法. 因为 2 个女人有 $\binom{5}{2}$ 种选法，因此这种情况下有 $30\binom{5}{2}=300$ 种不同的选法. ■

例 4c 考虑 n 个天线，其中 m 个天线有缺陷，$n-m$ 个天线是实用的，假设所有有缺陷的天线和所有实用的天线没有区别，那么任意两个有缺陷的天线不连接的接线方法有多少种？

解 对 $n-m$ 个实用的天线排队，现在假设任意两个有缺陷的天线均不连接，那么两个实用天线之间最多只有一个有缺陷的天线，这就是说在 $n-m$ 个实用天线之间的 $n-m+1$ 个位置中——图 1-1 中用脱字符号表示，必须选择其中的 m 个位置

$$\wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \ldots \wedge 1 \wedge 1 \wedge$$

1 = 实用的

∧ = 最多只有一个有缺陷的天线的位置

图 1-1

⊖ 习惯上，约定 0! 为 1，于是 $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$. 当 $i<0$ 或 $i>n$ 时，我们取 $\binom{n}{i}$ 等于 0.

来放有缺陷的天线，从而有$\binom{n-m+1}{m}$种连接，其中在任意两个有缺陷的天线之间至少有一个实用的天线. ■ 7

一个有用的组合恒等式为

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r} \quad 1\leqslant r\leqslant n \tag{4-1}$$

式(4-1)可以用解析的方法证明，也可用如下组合方法证明. 考虑一个包含 n 个对象的集合并挑出其中特定的某一个——称之为 1 号对象. 于是，包含 1 号对象且容量为 r 的组合数为$\binom{n-1}{r-1}$(因为每一个这样的组合都是从剩下的 $n-1$ 个对象中再取 $r-1$ 个组成). 同样地，不含 1 号对象且容量为 r 的组合数为$\binom{n-1}{r}$. 由于容量为 r 的组合总数为$\binom{n}{r}$，式(4-1)得证.

通常称$\binom{n}{r}$为**二项式系数**，这是由于它在二项式定理中占有重要的地位.

二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \tag{4-2}$$

我们将给出二项式定理的两个证明，前者用数学归纳法，而后者则基于组合法.

二项式定理的归纳法证明 当 $n=1$ 时，式(4-2)化为

$$x+y=\binom{1}{0}x^0y^1+\binom{1}{1}x^1y^0=y+x$$

设式(4-2)对 $n-1$ 成立，那么

$$\begin{aligned}(x+y)^n&=(x+y)(x+y)^{n-1}=(x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^ky^{n-1-k}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-1-k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^ky^{n-k}\end{aligned}$$

在第一个和式中令 $i=k+1$，在第二个和式中令 $i=k$，则有 8

$$\begin{aligned}(x+y)^n&=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}x^iy^{n-i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^iy^{n-i}\\&=x^n+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right]x^iy^{n-i}+y^n\\&=x^n+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}+y^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}\end{aligned}$$

其中倒数第二个等式是由式(4-1)得到的. 由归纳法，定理得证. ■

二项式定理的组合法证明 考虑乘积

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)$$

它的展开式是 2^n 项的和，每一项是 n 个因子的积，并且对每一个 $i=1, 2\cdots, n$，和式中 2^n 项的各项都将包含 x_i 或 y_i. 例如，

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)=x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2$$

现问：在和式这 2^n 项中恰由 k 个 x_i 因子、$(n-k)$ 个 y_i 因子组成的项有多少？由于 k 个 x_i 与 $(n-k)$ 个 y_i 组成的每一项正好对应着从 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任选 k 个的一种选法，故这样的项应有 $\binom{n}{k}$ 个. 令 $x_i=x,y_i=y,i=1,\cdots,n$，于是得到

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \qquad \blacksquare$$

例 4d 展开 $(x+y)^3$.

解

$$(x+y)^3=\binom{3}{0}x^0y^3+\binom{3}{1}x^1y^2+\binom{3}{2}x^2y^1+\binom{3}{3}x^3y^0=y^3+3xy^2+3x^2y+x^3 \qquad \blacksquare$$

例 4e n 个元素的集合总共有多少个子集？

解 因为容量为 k 的子集共 $\binom{n}{k}$ 个，故要求的答案是

9

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$$

这个结果也可由下述方法得到：把 0 或 1 中的一个数分配给此集合中的每一个元素. 若以全体分配到 1 的元素构成一个子集，则分配方法与子集之间是一一对应的. 由于总共有 2^n 种可能的分配方法，故子集总数为 2^n.

注意到已经把零个元素组成的集合(即空集)算作一个子集，所以至少含一个元素的子集数应为 2^n-1. $\blacksquare$

1.5 多项式系数

本节考虑下列问题：将含有 n 个元素的集合分为各含 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 个元素的 r 个不同的组，其中 $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$，问可能有多少种不同的分法？为回答这一问题，我们注意到，第一组有 $\binom{n}{n_1}$ 种可能选法；对第一组的每一种选法，第二组有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种可能选法；对前两组的每一种选法，第三组有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种可能选法；以此类推. 因此，根据推广的计数基本原理可知，共有

$$\begin{aligned}&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}\\&=\frac{n!}{(n-n_1)!\;n_1!}\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\;n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!\;n_r!}=\frac{n!}{n_1!\;n_2!\cdots n_r!}\end{aligned}$$

种可能的分法.

记号 若 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，我们定义

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_1!\;n_2!\cdots n_r!}$$

于是，若将 n 个不同的对象分成容量各为 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 的 r 个不同的组，则 $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 表示

可能分法的数目. 10

例 5a 某小城市的一个警察局有 10 名警官，如果需要 5 名警官去巡逻、2 名警官专门在局机关值班、3 名警官留在局里作为后备，问把这 10 名警官分成 3 组可能有多少种不同分法？

解 有$\frac{10!}{5!\ 2!\ 3!}=2\,520$种可能分法. ■

例 5b 将 10 个孩子分为各 5 人的 A，B 两队，A 队去参加某一场比赛，B 队则去参加另一场比赛. 问可能有多少种不同分法？

解 有$\frac{10!}{5!\ 5!}=252$种可能分法. ■

例 5c 10 个孩子要举行一场篮球赛. 他们在操场上分成各 5 人的两队，问可能有多少种不同分法？

解 注意此例与例 5b 不同，因为现在不考虑两队的次序. 也就是说，只要分成两队，不存在 A 队 B 队的问题. 因此，所求的答案是

$$\frac{10!\ /(5!\ 5!)}{2!}=126$$ ■

下面的定理是二项式定理的推广，其证明留作练习.

多项式定理

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum_{\substack{(n_1,\cdots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

也就是说，求和是取遍一切满足 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ 的非负整值向量$(n_1,n_2,\cdots,n_r)$.

$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}$通常称为多项式系数. 11

例 5d

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^2&=\binom{2}{2,0,0}x_1^2x_2^0x_3^0+\binom{2}{0,2,0}x_1^0x_2^2x_3^0+\binom{2}{0,0,2}x_1^0x_2^0x_3^2\\&\quad+\binom{2}{1,1,0}x_1^1x_2^1x_3^0+\binom{2}{1,0,1}x_1^1x_2^0x_3^1+\binom{2}{0,1,1}x_1^0x_2^1x_3^1\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\end{aligned}$$ ■

*1.6 方程整数解的个数[⊖]

将 n 个不同的球分放到 r 个不同的箱中，共有 r^n 个可能结果. 这是因为每个球都可能被放入这 r 个箱中的任何一个. 但是，如果假定 n 个球彼此不加区别，此时又有多少种不同结果呢？由于球不加区别，故可以把分 n 个球到 r 个箱中这一试验的结果看作一个向量$(x_1,x_2,\cdots,x_r)$，其中 x_i 表示被分到第 i 个箱中的球数，因此，问题化为求满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_r=n$$

的各非负整值向量$(x_1,x_2,\cdots,x_r)$的个数. 为了解决这个问题，我们先考虑正整数解的个数，

⊖ “*”号表示此内容为选学内容.

为此假设对 n 个不同的物体排队，并把它们分到 r 个非空的组中，从相邻物体之间的 $n-1$ 个空中选择 $r-1$ 个作为分割点(见图 1-2)．例如，令 $n=8$，$r=3$，选取如下所示的 2 个分割点：

000|000|00

从而得到的向量为 $x_1=3$，$x_2=3$，$x_3=2$，因为有 $\binom{n-1}{r-1}$ 个可能的结果，所以得到以下命题.

$0 \wedge 0 \wedge 0 \wedge \ldots \wedge 0 \wedge 0$

n 个物体 0

从相邻物体之间的 $n-1$ 个空中选择 $r-1$ 个空 $\wedge$.

图 1-2

命题 6.1 满足条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_r=n\,(x_i>0,i=1,\cdots,r)$$

的正整值向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 有 $\binom{n-1}{r-1}$ 个.

为了得到非负(相对于正的)解的个数，注意到方程 $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$ 非负解的个数与方程 $y_1+\cdots+y_r=n+r$ 正数解的个数相同(令 $y_i=x_i+1$，$i=1,\cdots,r$)，因此，由命题 6.1 得到以下命题.

命题 6.2 满足条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_r=n \tag{6-1}$$

的非负整值向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 有 $\binom{n+r-1}{r-1}$ 个.

例 6a $x_1+x_2=3$ 有多少组互不相同的非负整数解？

解 有 $\binom{3+2-1}{2-1}=4$ 组解，即 $(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)$. ■

例 6b 一位投资者要在 4 个投资项目上投资 2 万美元，每一个投资项目必须以 1 千美元为单位投资．如果 2 万美元全部投资，那么有多少种不同的投资策略？如果不需要所有的钱都投资又有多少种投资策略？

解 如果令 $x_i(i=1,2,3,4)$ 表示投资在第 i 个项目上的钱数(以千计)，那么当所有的钱都投资时，x_1,x_2,x_3,x_4 是满足 $x_1+x_2+x_3+x_4=20\,(x_i\geqslant 0)$ 的整数．因此，由命题 6.2 有
12~13 $\binom{23}{3}=1\ 771$ 种投资策略．如果并非所有的钱都投资，那么令 x_5 表示没有投资的钱数，一个策略是满足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=20$ 的非负整值向量 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)，因此由命题 6.2 有 $\binom{24}{4}=10\ 626$ 种投资策略. ■

例 6c $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n$ 的多项展开式中共有多少项？

解 $$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum\binom{n}{n_1,\cdots,n_r}x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}$$

其中，求和是取遍满足 $n_1+\cdots+n_r=n$ 的所有非负整值 $(n_1,\cdots,n_r)$，故由命题 6.2 知，此多项展开式共有 $\binom{n+r-1}{r-1}$ 项. ■

例 6d 考虑例 4c，其中有一个 n 项的集合，其中 m 项(无区别)有缺陷，余下的 $n-m$ 项(也是无区别)实用，我们的目标是找到任意两个有缺陷的天线不连接的接线方法有多少种．为了确定这个量，假设有缺陷的项自身进行排列，实用的项再进行排列，假设 x_1 表示放在第一个

有缺陷项左边的实用项的个数，x_2 表示放在前两个有缺陷项之间的实用项的个数，如此下去．这样，就有下面的图解：

$$x_1\ 0\ x_2\ 0\cdots x_m\ 0\ x_{m+1}$$

现在只要 $x_i>0(i=2,\cdots,m)$，则任意一对有缺陷项之间就至少有一个实用项，因此满足条件的结果的数目就是满足下列条件的向量 $x_1,\cdots,x_{m+1}$ 的个数：

$$x_1+\cdots+x_{m+1}=n-m \quad x_1\geqslant 0, x_{m+1}\geqslant 0, x_i>0, i=2,\cdots,m$$

但是，假设令 $y_1=x_1+1, y_i=x_i, i=2,\cdots,m, y_{m+1}=x_{m+1}+1$，可以看到其结果和满足下列条件的正向量 $(y_1,\cdots,y_{m+1})$ 的个数相同：

$$y_1+y_2+\cdots+y_{m+1}=n-m+2$$

因此，由命题 6.1 有 $\binom{n-m+1}{m}$ 个结果，这和例 4c 的结果是一样的．

假设现在我们对每一对有缺陷项都被至少 2 个实用项分开的结果的数目感兴趣，用上述同样的方法，其结果等于满足下列条件的向量个数： 14

$$x_1+\cdots+x_{m+1}=n-m \quad x_1\geqslant 0, x_{m+1}\geqslant 0, x_i\geqslant 2, i=2,\cdots,m$$

令 $y_1=x_1+1, y_i=x_i-1, i=2,\cdots,m, y_{m+1}=x_{m+1}+1$，则其结果和下列方程的正解的个数相同：

$$y_1+\cdots+y_{m+1}=n-2m+3$$

因此，由命题 6.1 有 $\binom{n-2m+2}{m}$ 个结果． ■

小结

如果一个试验由两部分组成，第一部分有 n 个可能结果，对其每一个结果第二部分有 m 个可能结果，那么此试验有 nm 个可能结果，这就是计数基本原理．

n 项有 $n!=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ 种线性排列，并且定义 $0!=1$．

令 $\binom{n}{i}=\frac{n!}{(n-i)!\ i!}$，其中 $0\leqslant i\leqslant n$，对于其他的 i 令它为 0．这个量表示从一个含有 n 项的集合中抽取含有 i 项的不同子集的个数，因为它在二项式定理中非常重要，所以通常称为二项式系数，即

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$$

对于和为 n 的非负整数 n_1，…，n_r，

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_r!}$$

表示将 n 个元素分为 r 个独立的不互相重叠的组的分法数，这些组分别包括 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 个独立元素．

习题

1. (a) 如果前两位用字母、后 5 位用数字，问可能有多少个不同的 7 位牌照？

   (b) 若进一步要求同一牌照所用的字母与数字都不重复，那么可能有多少个 7 位牌照？

2. 一个骰子掷 4 次可能有多少种结果？例如，第一次掷 3 点，第二次掷 4 点，第三次掷 3 点，第四次掷 1