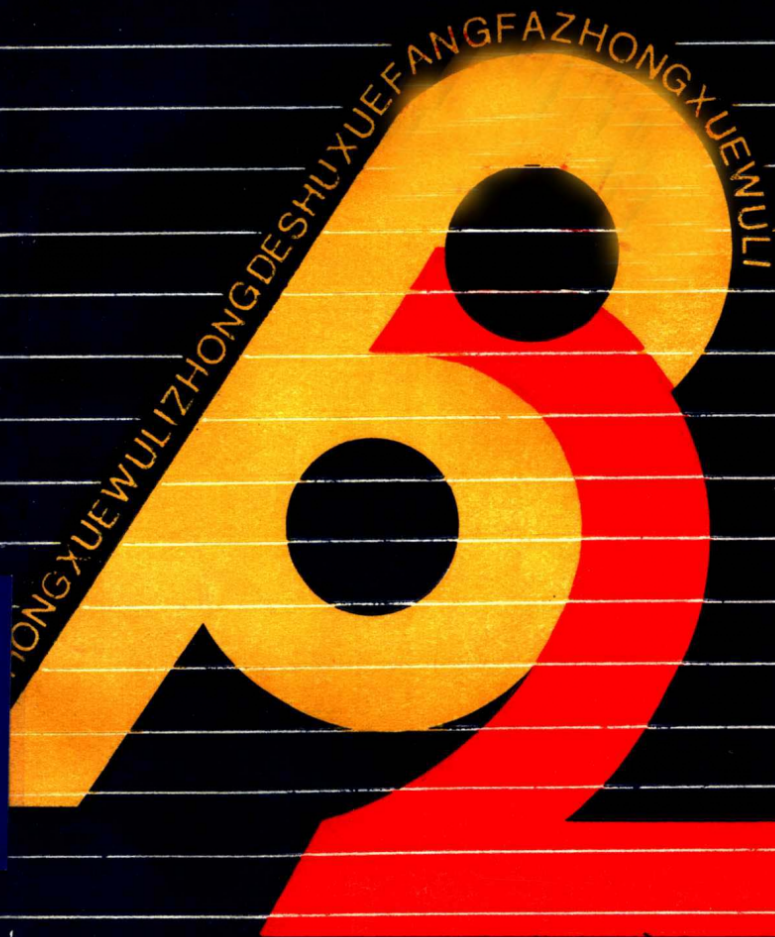


中学物理 中的数学方法

祝道福 郭 铨 编著



黑龙江教育出版社

中学物理中的数学方法

祝道福 郭 铨 编著

黑 龙 江 教 育 出 版 社

1991年·哈尔滨

中学物理中的数学方法

祝道福 郭 铨 编著

责任编辑：丁一平

封面设计：冯春兰

黑龙江教育出版社出版(哈尔滨市道里九站街 1 号)

黑龙江新华附属印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092 毫米 1/32·印张 10.25·字数 210 千

1991年2月第1版·1991年2月第1次印刷

印数：1—6,436

ISBN 7-5316-1177-5/G·842 定价：3.30元

前 言

在中学物理教学中，培养学生用数学方法分析处理物理问题的能力是非常必要的。数学不仅为物理学提供了研究方法和计算手段，也是训练学生思维和逻辑推理能力的重要工具。数学方法对于深入理解物理概念和规律，揭示物理现象及物理过程的内涵和实质所起的作用是不容低估的。

正是由于上述原因，我们在本书中通过对大量典型例题的剖析，详细阐述了数学方法对处理中学物理问题的重要性，并进一步探讨了数学在解决物理问题时，对促进科学思维和完善研究方法所起的作用，以及对于形象地建立物理模型和定量精确地描述物理过程的巨大帮助。

相信本书对高中学生较全面地掌握物理中的数学方法，增强解题能力和熟练解题技巧会有较大的帮助，本书也为物理教师提供了重要的教学参考。

在本书的编写过程中，我们广泛翻阅收集了大量参考资料，尽量做到内容详实，取材新颖。但由于编者水平有限，难免有疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

作 者

1990年3月

目 录

第一章 数学与物理的关系	(1)
第二章 数学知识在物理解题中的应用	(14)
§ 1 函 数.....	(14)
§ 2 方程和方程组.....	(36)
§ 3 不等式.....	(55)
§ 4 极 值.....	(79)
§ 5 平均值.....	(91)
§ 6 级 数.....	(100)
§ 7 极 限.....	(111)
§ 8 几 何.....	(123)
§ 9 三 角.....	(143)
§ 10 解析几何.....	(156)
第三章 中学物理中常用的数学方法	(177)
§ 1 矢量法.....	(177)
§ 2 比例法.....	(202)
§ 3 等效法.....	(216)
§ 4 递推法.....	(231)
§ 5 外推法.....	(236)
§ 6 图象法.....	(245)
§ 7 叠加与补偿法.....	(265)
§ 8 换元 (替代) 法.....	(276)

§ 9	符号法	(282)
§ 10	估算法	(286)
§ 11	误差分析法	(291)
第四章	中学物理中的逻辑方法	(301)
§ 1	集合方法	(301)
§ 2	充要条件	(306)
§ 3	反证法	(314)
§ 4	悖论	(319)

第一章 数学与物理的关系

数学是研究物理的重要工具。研究物理问题，从来就离不开数学。准确地表达物理概念、定律需要数学，推理、论证、计算需要数学，进行物理实验也需要数学，培养学生运用数学方法解决物理问题的能力是中学物理教学的目的之一。数学为物理提供了研究方法，物理也为数学提供了模型。在运用数学方法解决物理问题时，特别应注意体现物理的特点，这主要表现在以下几个方面：

1. 数学意义与物理意义

数学意义和物理意义是两个不同的概念，数学意义要受到数学关系式中条件的制约，而物理意义则依附于物理现象或规律的客观实在性，这是因为数学上描述的是抽象的数、型，物理上描述的是具体的物理量。

物理学的重要定律，常常用数学公式的形式来表示，例如欧姆定律 $I = \frac{U}{R}$ ，牛顿第二定律 $F = ma$ ，库仑定律

$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$ 等。这些物理公式，以简洁的形式建立了物理量之间明确的函数关系，看起来一目了然，给表述和应用公式提供了极大的方便。但是我们特别应该注意，数学毕竟只是研究和描述物理现象的辅助工具，物理定律的全部物理内容及定律的适用条件，数学是无法代替的。

例如：对于向心力公式 $F = m\omega^2 R$ 和 $F = m \frac{v^2}{R}$ ，有的人说第一个式子是向心力与 R 成正比，第二个式子是向心力与 R 成反比，这不是矛盾的吗？

对于牛顿第二定律，也可能出现下列理解上的错误：

①由数学变形得 $m = \frac{F}{a}$ ，认为物体的质量与外力成正比。

②由数学等式概念出发，认为 ma 具有力的量纲，因此也是力，不明确等号只表示量值相等，等号两边的物理意义是完全不同的。

③从数学的角度进行讨论，当 $F = 0$ 时 $a = 0$ ，此时物体将作匀速直线运动或处于静止状态，从而认为“牛顿第一定律是牛顿第二定律的特例”，这实际上就否认了牛顿第一定律独立的物理意义，第一定律中引入的惯性概念和物体不受力时的情况，是第二定律无法包括的。

在运用数学方法解决物理问题时，特别应注意物理现象和规律质的属性和特征，一般说来，物理方程中必定有符合物理意义的解答结果，但有数学意义的解则不一定有相应的物理意义，没有数学意义的解也不一定没有物理意义。

只有数学意义没有物理意义的例子：

例一：在一根长为 1 米的一端封闭的玻璃管中，用 $h = 20$ 厘米长的水银柱封闭住一段 $l = 50$ 厘米长的空气柱，此时管子开口朝上竖直放置，现将此管缓慢地倒过来开口朝下竖直放置，求管内气柱的长（设大气压强 $P_0 = 76$ 厘米水银柱）

解：设末状态时气柱长为 x 厘米。

初态时压强 $P_1 = P_0 + h = 96$ 厘米水银柱。

末态时压强 $P_2 = P_0 - h = 56$ 厘米水银柱。

根据玻——马定律 $P_1 V_1 = P_2 V_2$ 得

$$96 \times 50 = 56 \cdot x$$

解得 $x = 85.7$ (厘米)

结果出来后,发现“ $L = 1$ 米”这一条件没用上。这是一道已知条件过多的习题吗?

否! 上述解答其实只有数学意义而没有物理意义! 这是因为“ $L = 1$ 米”这一条件与所求的结果有着密切的关系,解必须满足: 气柱长 + 水银柱长 $\leq$ 玻璃管长。而将 $x = 85.7$ 厘米与题意对照知, $x + h > L$, 因此这一结果显然不正确,应该考虑倒置后有一部分水银漏出的情况。

正确的解法应是:

设末状态时气柱长 x 厘米, 即然在末态时有部分水银漏出, 则水银柱的长应为 $(L - x)$ 厘米, 故:

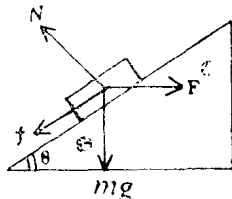
$$(P_0 + h) \times 50 = [P_0 - (L - x)] \cdot x$$

$$\text{即 } 96 \times 50 = (x - 24) \cdot x$$

解得 $x = 82.3$ (厘米)

只有物理意义, 没有数学意义的例子。

例二: 质量为 m 的木箱置于倾角为 θ 的斜面上, 受到水平推力的作用沿斜面匀速上滑, 设木箱与斜面间的滑动摩擦系数为 μ , 求水平推力 F 的大小。



解: 对木块进行受力分析, 在垂

图 2-1

直斜面方向 $N = mg \cos \theta + F \sin \theta$,

在平行斜面方向 $F \cos \theta = \mu N + mg \sin \theta$

由以上两式消去 N 后, 可得

$$F = \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} mg.$$

对此式进行分析, 表面上看, 当 $\cos \theta = \mu \sin \theta$ 时, 该式分母为零, $F \rightarrow \infty$; 当 $\cos \theta < \mu \sin \theta$ 时, $F < 0$; 二者都不具有数学意义。但这一结果实际上却具有明确的物理意义, 若 $\cos \theta \leq \mu \sin \theta$, 即 $\theta \geq \tan^{-1} 1/\mu$, 它实际上意味着无论推力 F 多大, 木箱都将处于静止状态, 不可能向上滑动。

例三: 如图1—2所示的电路,

$\varepsilon = 10$ 伏, $r = 1.0$ 欧, $R = 24$ 欧, L

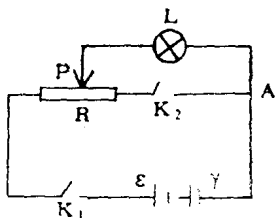


图 1—2

为耐压 6 伏、功率为 3 瓦的小灯泡。当电键 K_1 闭合, K_2 断开后, 移动触头 P , PA 间的最大电压可为多少?

一般的解法是:

$$\text{灯泡的电阻 } R_L = \frac{U^2}{P} = 12 \text{ 欧}$$

当 K_1 闭合, K_2 断开后, 设 R 在电路中部分的电阻 (P 点左边部分) 为 R_x , 则:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_L + R_x + r}, \quad U_L = \frac{\varepsilon R_L}{R_L + R_x + r}$$

显然, 只有当 $R_x = 0$ 时, U_L 有最大值 $\frac{\varepsilon R_L}{R_L + r} = 9.2$

伏。

多数同学做到这里也就结束了，但仔细审题的同学还会发现，这一结果只有数学意义而无物理意义。这是因为 U_L 的最大值已超过灯泡的耐压，这时灯泡将烧坏，故 PA 间的最大电压只能是 6 伏。

实际上，这个有物理意义的解是否真有物理意义呢？还应该做进一步分析：因为电路中没有装指示电表，因而不能保证移动触头 P 而使 PA 间的电压不超过 6 伏。一旦 PA 间的电压超过灯泡耐压值，这时灯泡将烧坏，电路断开。因此 PA 间的最大电压就是电路不闭合时的路端电压，其大小等于电源的电动势 10 伏。

这个例子表明：数学不能代替物理，数学意义与物理意义有着本质上的区别。对于一道物理习题，我们不应只满足于用数学方法得到的一般结果，而应从物理的角度进行更深入的分析。

2. 数学概念与物理概念

物理中许多基本概念，是以数学形式给出的，例如磁感应强度 $B = \frac{F}{IL}$ ，向心加速度 $a = \frac{v^2}{R}$ ，即时速度 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$

$\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 等。对于这些以比例、极限等形式定义的物理量，应该

在质的方面同数学上的比例、极限等概念严格区别开来，这就是说，应该特别强调物理概念的物理属性，用数学方法给出的物理概念应具有明确的物理意义。例如定义 $W = FS$ 时应强调 S 是物体在力的方向上的位移。对于磁感应强度的定义式 $B = \frac{F}{IL}$ 也应强调 B 是描述磁场力的特征的物理量，

它的大小仅由磁场本身决定，而与放入磁场的通电导线长度、电流强度和它所受的磁场力无关。

另外从量的方面来看，物理概念是受物理本质制约的，例如胡克定律 $F = Kx$ 中只有力 F 在弹簧的弹性限度之内， K 才可表示为弹簧的倔强系数；以极限方式定义的公式 $v =$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ 中， Δt 只是数学上的无穷小时间间隔，而物理上由

于测量仪器精度上的限制， Δt 只能取得小到一定程度的结果。

还有，物理上物理量的符号同数学上的正、负号也是有本质区别的，例如，力学中的正负号可表示矢量的方向，热学中的正负号可表示放热吸热，电学中的正负号可表示不同性质的电荷，光学中的正负号可表示透镜的凸凹或像的虚实等，这些都应该引起我们的充分重视。

3. 数学模型和物理模型

数学模型和物理模型有着密切的关系，数学模型是对实体特征和变化规律的定量抽象，物理模型则实际给出了实体的本质属性。数学上有几何点的模型，物理上就有质点、点光源、点电荷等模型；数学上有线的概念，物理上就有光线、电力线、磁力线等模型；数学上有面的概念，物理上就有面电荷、无限大带电平面等模型。上述提到的点、线、面模型，实际上就是物理上的理想模型，而数学与物理这两门科学根本不同的本质属性，决定了数学模型与物理模型的本质区别。

高度抽象是数学的基本特征，这种数学抽象表现为仅保

留量的关系和空间形式而放弃了一般的具体现象。物理学的研究方法和对象则与数学有质的区别，它通过实践研究物理现象的一般规律，物理模型正是顺应这种需要，从真实物体抽象出来，并经受实践的严格检验。因此，数学模型的高度抽象的共性与物理模型的一般抽象的特殊性，数学模型高度的思辩性与物理模型彻底的实践性，数学模型广泛的适用性与物理模型具体的局限性，都是它们本质属性不同的根本表现。

例如：数学上有几何点的概念，这种没有大小的几何点是绝对的，而物理上的点电荷只是在研究问题时可以忽略带电体的大小形状，而不能抽象为体积为零的几何体。其次，点电荷只具有相对的意义而不具有绝对的意义，两个带电体只要其线度远小于它们之间的距离就可看作点电荷。第三，对点电荷在真空中产生电场的公式 $E = \frac{KQ}{r^2}$ ，从数学的角度

分析，当 $r \rightarrow 0$ 时， $E \rightarrow \infty$ 这在物理上是根本行不通的，属于一种没有物理意义的外推。

物理中还有一类模型与数学模型有相同的名称，如无限大、无限可分等。这些模型，尽管名称相同，本质意义也是根本不同的。因为在一般情况下，数学上所描述的过程是一种理想化的过程，它属于真正的无限和无界的变化过程。物理上的研究对象则决定了它所描述的只能是有限的和有界的情况。例如，匀速直线运动是指沿直线运动的物体“在任何相等的时间内位移都相等”，这个“任何相等的时间内”应该是指任何小的时间间隔，而在物理实际中，时间间隔的测量

要受到仪器精密程度的制约和涨落的影响，数量级太小的时间间隔是没有任何实际意义的。因此，从某种意义上讲，数学是绝对的，而物理只是相对的。

在客观世界中，虽然物质的运动形式千差万别，然而却可以有共同的量的规律，同一方程可以描述不同的自然现象。例如：运动的趋稳性、电容的充放电、放射性物质的衰变、高温物体的冷却等。这些不同的物理问题都具有相同的数学模型，遵从相同的变化规律——指数形式的规律，这不仅揭示了自然规律之间统一的内在联系，而且也提供了用数学模拟的方法描述不同实体运动规律的可能。

4. 数学公式与物理公式

物理公式是定量计算和逻辑推理的前提，与数学公式不同，有许多物理公式是通过实验方法来确定的。例如，电阻定律 $R = \rho \frac{L}{S}$ ，要证明它的正确性，可以用实验的方法分别验证当 S 一定时 R 与 L 成正比，当 L 一定时 R 与 S 成反比；导体的电阻与材料有关。而在验证上述正反比关系时，实际上只需验证一、两个数据即可，这就是不完全归纳法，与数学上的完全归纳法不一样。

对于物理公式，要特别注意理解它的物理意义，例如透镜公式 $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ ，对于物距 u 要永远取正值，焦距 f 对于凸透镜为正，对于凹透镜则为负；像距 v 对于实像为正，虚像则为负。对有关电场强度的两个公式 $E = \frac{F}{q}$ 和 $E = \frac{KQ}{r^2}$ 则应明确，前者是电场强度的定义式，在一般情况下是普遍适

用的，后者则只适用于点电荷电场强度的计算。

与数学公式不同，应用物理公式，必须明确公式的适用范围，不能在任何范围内都盲目地应用物理公式。例如单摆的周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 只适用于摆角不太大（小于 5° ）的情况；

理想气体的状态方程 $PV = \frac{M}{\mu}RT$ 只适用于压强不太大，

温度不太低的情况，对于实际气体，在考虑分子之间的相互作用及分子的体积等情况的前提下，要对压强和体积进行修正，得出范德瓦尔斯方程 $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ ；牛顿运动定律只是物体在低速运动下规律的真实写照，而在高速的情况下，它将被相对论力学所取代。

任何物理公式，都是在一定条件下成立的，条件变了，物体的运动形式也要跟着发生相应的变化，因此应该特别引起注意。

例四：以 10 米/秒的速度行驶的汽车，紧急刹车后加速度大小是 2.0 米/秒²，求刹车后 6.0 秒的位移。

许多学生得出的结果如下：

$$S = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 10 \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times 36 = 24 \text{ (米)}$$

这一计算结果从数学角度分析是没有错误的，然而从物理的角度分析却是错误的，因为汽车刹车 5 秒后即已停下，因此，正确的答案应是 25 米。

例五：如图 1—3 所示，一小球质量为 m ，第一次系于长为 l 的细线下，第二次系于长为 l 的细杆下，线和杆均可绕

其端点旋转，要想使小球能绕过最高点在竖直平面内做圆周运动，在上述两种情况下，应给予小球最小的初速是多少？

解：取小球在最低点时的位置为重力势能零点。对于细杆，只要小球在最低点的动能等于它在最高点的重力势能，

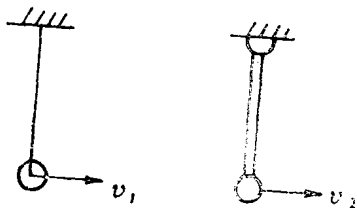


图 1-3

小球就能绕过最高点做圆周运动，因此 $v = \sqrt{2gl}$ 。

对于细绳，小球在最高点的速度不能为零，如果不计空气阻力，小球只受两个力：重力和绳的拉力的作用，因此 $F_{向} = mg + T = \frac{mv_0^2}{R}$ 。从上式可知，要想使 v 最小， T 要最小，即 $T = 0$ 。这时向心力只由重力提供：

$$mg = \frac{mv_0^2}{l} \quad \therefore v_0 = \sqrt{gl}$$

在这一过程中小球的机械能守恒

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = mg \cdot 2l + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{5}{2}gl}.$$

5. 数学方法与物理方法

大量定量计算的物理问题都涉及到数学处理，在我们用数学方法解决物理问题时，应该特别注意突出物理问题的特点，切忌“以数代理”，以数学掩盖问题的物理实质。

例六：有一电池，电动势 $\varepsilon = 6$ 伏，内阻 $r = 0.5$ 欧，现将此电池接在电阻丝上，使其发出 9 瓦的热功率，试求该电阻丝

的阻值。

解：设电阻丝的阻值为 R ，根据题意可得：

$$\left(\frac{6}{0.5+R}\right)^2 \cdot R = 9$$

解此二次方程，其解为 $R_1 = 2.9$ 欧， $R_2 = 0.1$ 欧。从数学的角度分析，这两个解都是正确的，然而从物理的角度分析， R_2 却是不可取的。这是因为取 R_2 时内阻上消耗的功率要远大于外电阻上消耗的功率。

例七：一架显微镜，物镜的焦距 $f_1 = 0.3$ 厘米，目镜的焦距 $f_2 = 2$ 厘米，目镜和物镜相距 16 厘米，如果这台显微镜观察到的像距目镜 25 厘米，求被观察物体离物镜多远？

解：由题意知 $v_2 = -25$ 厘米， $f_2 = 2$ 厘米

$$\text{据 } \frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2} \text{ 得 } u_2 = \frac{50}{27} \text{ (厘米)}$$

$$\therefore v_1 = 16 - \frac{50}{27} = 14.15 \text{ (厘米)}$$

$$\text{又据 } \frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1} \text{ 得 } u_1 = 0.307 \text{ (厘米)}$$

做到这里时，有些学生将最后一位有效数字“7”去掉，得出物距为 0.3 厘米。这里表面看来是一个有效数字的处理问题，而实际上却完全违背了物理规律，因为当物距等于 0.3 厘米时，物距等于焦距，这时将不能成像。

例八：如图 1—4 所示，套在长绝缘杆上的小球质量为 m ，带电量为 $+q$ ，小球可在杆上滑动，将此杆放在互相垂直且沿水平方向的匀强电场 E 和匀强磁场 B 中，设小球与杆间的摩擦系数为 μ ，求小球由静止沿杆竖直下落的最大速度