教与学·教与学·教与学·教与学·教与学

高中代数

第三册

天津科学技术出版社

教与学

高中代数

第三册

丛书顾问　崔孟明

编　　者　于仲云　张燕农

天津科学技术出版社

教与学

高中代数

第三册

丛书顾问　崔孟明

编　　者　于仲云　张燕农

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

山东省临沭县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米　1/32　印张5.25　字数138 000

1988年5月第1版

1988年5月第1次印刷

印数：1－54 900

ISBN 7-5308-0353-0/G·83　定价：1.05元

前　言

教学过程是师生双边活动统一的过程。但应强调指出：教学活动的中心是学生，教和学都是为使学生尽多尽快地增长知识和才干；教学活动的主体也是学生，不论多么高明的教师用怎样巧妙的方法去教，学生都必须经过自己的实践和思维，才能最后牢固地掌握知识和增长能力。因此，教师的主导作用，首先是激发学生学习的积极性、主动性，同时要及时地满足学生对知识的需要，恰当地帮助学生克服学习中的困难。在整个教学活动中教师都要注意，不要伤害学生的主动性和积极性，不要破坏学生思维的连续和完整。要做到这一点，教师就必须充分了解学生的学习过程和心理活动。因此，当今国内外，都把对学习方法的研究作为教法研究的一项重要内容，以使教学活动更好地适应学生需要，进一步提高教学效率。

《教与学》丛书就是基于上述思想和多年实践经验编写而成的，旨在从教和学两方面启发学生主动探求，积极思维，尽多尽快地增长知识和自主学习的能力。

本丛书包括数学、物理、化学、生物、语文和英语六个学科，每科与课本对应分册，每册均按章或单元设有若干栏目。因这些栏目是根据学科内容需要设置的，因此，有共同的，也有专设的。

"知识结构"是用图表或简短文字说明相关范围内各项

知识间的推演、包含等内在联系，从中可找到学习的途径、知识的重点和把握知识的关键。它既是学习入门的向导，也是掌握知识的纲领。

“知识反馈”是一组检查课堂学习效果的练习题。它的编写，既考虑了覆盖面，也考虑了重点、难点和能力、方法的训练。因此，通过这套练习题，不仅能了解课堂效果，而且能使所学知识得到及时的巩固和进一步的理解，并可提高对知识的运用能力。

“课堂以外”是一在较大知识范围设立的比较活跃的栏目，可满足多方面的需要。其内容既与教材紧密衔接，又属课堂以外，有动脑的也有动手的。希望通过它能启迪智力、训练能力、开阔视野、疏通思路。

“教材提示”和“学法指导”，一方面是给学生以具体的知识，一方面是通过具体的学习过程教给学生一些富有成效的学习方法。

本丛书由景山学校校长、特级教师崔孟明同志任学术指导，由李勃梁、高柏林、宋志唐、邢永庆等同志分任各科主编，由京津部分有多年教学经验的教师编写。

本丛书的编写，虽几经讨论修改，但由于是经验性材料，难免有不足之处，欢迎读者批评指正。

目　　录

第一章 一元多项式和高次方程

随着数域从实数扩展到复数，代数中其它内容（如代数式、函数、方程等)的研究也都相应深化．

本章系统地归纳、完整了中学代数中多项式与方程的知识．在复数域内，建立了一元多项式唯一确定的因式分解形式和一元 n 次方程有且仅有 n 个根的初步理论；还具体进行了某些特殊形式多项式的因式分解和一元 n 次方程的求解．

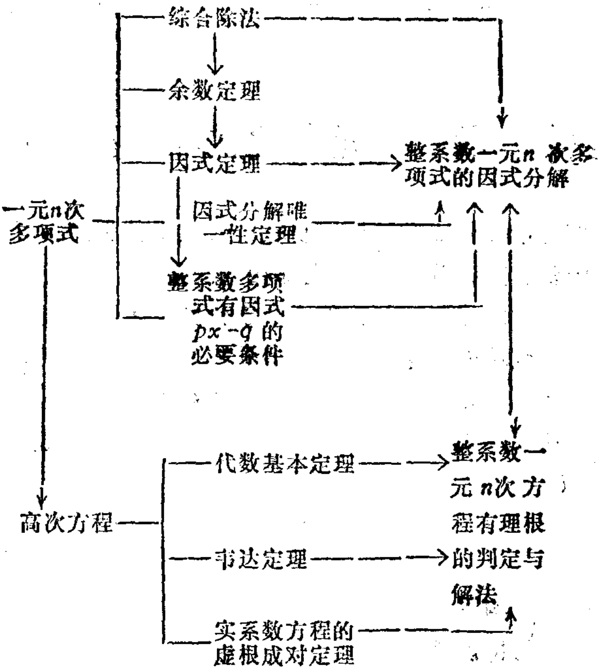
知 识 结 构

一、结构图示（见2页）

二、结构说明

1．主要内容　主要内容是复系数一元 n 次多项式和一元 n 次方程的基本概念和重要性质．

2．内容之间的内在联系　从整体看，是从一元n次多项式的理论推导出高次方程的理论与一些特殊高次方程的解法；从局部看，由综合除法导出余数定理，由余数定理导出因式定理，由因式定理推导出整系数多项式有因式$px-q$的必要条件．从综合除法直到整系数多项式有因式$px-q$的必要条件，都是进行整系数一元n次多项式的因式分解的必要知识；有了多项式的理论和代数基本定理、韦达定理、实系数方程的虚根成对定理，就能够求解某些特殊的整系数一元 n



次方程。

3. 整系数一元 n 次方程的根又可用于整系数一元 n 次多项式的因式分解。

4. 余数定理、因式定理、代数基本定理是本章的理论基础；综合除法、整系数多项式有因式 $px-q$ 的必要条件、一元 n 次方程根与系数的关系、实系数方程虚根成对定理，是进行某些多项式的因式分解和某些高次方程求根的有力工具。这些都是本章的重点。

教材提示

一、以旧带新，加强知识的系統性

本章系统地归纳了中学阶段有关多项式和一元 n 次方程的理论，在讲授时，边归納旧知识边引入新知识，可使知识自然扩展，而使之系统化。

在讲授多项式理论时，可先复习多项式与多项式相除，特别是竖式除法、因式分解等有关概念。进而引申出综合除法、因式定理、多项式的根、多项式的值等。

在讲授一元 n 次方程之前，可先系统复习一元二次方程在复数域内的求根公式、根的个数、根与系数之间的关系，以及有关求根方法等。然后再讲一元 n 次方程有关的知识，使新旧知识之间衔接自然。下面具体介绍本章的一些内容。

1.多项式 $(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)$及其因式分解

组成中学"代数"的最基本的因素，不外乎两个方面，即数字(包括用字母代表的数字) 和运算符号，代数"式"子，就是用运算符号把数字或字母（代表数字）連结起来而成。

（1）多项式的因式分解 因式分解在初中一年级学习代数时就遇到过，是把一个多项式化成几个整式的积的形式.其实,因式分解的内容并不止于此.例如将超越式$\dfrac{a^{x+2}+a^x}{a^x}$化简时，是将分子的a^x提出来；化简三角函数式$\dfrac{1+\cos x}{\cos\dfrac{x}{2}}$

时，是将分子运用三角函数公式$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$。这实际上都用到了因式分解．因此，因式分解可以这样理解，即把最后运算是加法、减法的式子化成最后运算是乘法的式子，就是因式分解．

为系统地认识因式分解，下面将过去学过的因式分解的方法加以小结（在实数集合中）．

提取公因式法

【例 1】将$10a(x-y)^2+5b(y-x)^3$因式分解．

解：$10a(x-y)^2+5b(y-x)^3$

$=5(x-y)^2[2a-b(x-y)]$

$=5(x-y)^2(2a-bx+by)$

分组分解法

【例 2】将$2mx-2nx+n-m$因式分解．

解：$2mx-2nx-m+n$

$=2x(m-n)-(m-n)$

$=(m-n)(2x-1)$

拆补项法

【例 3】将$x^6+x^4+x^2$因式分解．

解：$x^6+x^4+x^2$

$=x^2(x^4+x^2+1)$

$=x^2(x^4+2x^2+1-x^2)$

$=x^2[(x^2+1)^2-x^2]$

$=x^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

【例 4】将$x^3+6x^2+11x+6$因式分解．

解：$x^3+6x^2+11x+6$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 11x + 6$$
$$= x^2(x+3) + (x+3)(3x+2)$$
$$= (x+3)(x^2+3x+2)$$
$$= (x+1)(x+2)(x+3).$$

十字相乘法

【例 5】将x^2+3x+2因式分解

解：x^2+3x+2

$$\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & \times & \\ 1 & & 2 \end{matrix}$$

$\therefore \quad x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

公式法

【例 6】将$a^3+3a^2bc+3ab^2c^2+b^3c^3$因式分解

解：$a^3+3a^2bc+3ab^2c^2+b^3c^3$

$$= a^3 + 3a^2(bc) + 3a(bc)^2 + (bc)^3$$
$$= (a+bc)^3$$

变量代换法

【例 7】将$(x^2+x-1)(x^2+x-2)-12$因式分解

解法一：$(x^2+x-1)(x^2+x-2)-12$

$$= (x^2+x)^2 - 3(x^2+x) + 2 - 12$$
$$= (x^2+x)^2 - 3(x^2+x) - 10$$

（设$y=x^2+x$）

$$= y^2 - 3y - 10 = (y+2)(y-5)$$
$$= (x^2+x+2)(x^2+x-5)$$
$$= (x^2+x+2)\left(x - \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$$

解法二：$(x^2+x-1)(x^2+x-2)-12$

$$=(x^2+x-1)(x^2+x-1-1)-12$$

$$(设y=x^2+x-1)$$

$$=(x^2+x-1)^2-(x^2+x-1)-12$$

$$=(x^2+x-1+3)(x^2+x-1-4)$$

$$=(x^2+x+2)(x^2+x-5)$$

$$=(x^2+x+2)\left(x-\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$$

【例 8】将$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$因式分解。

解：$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

$$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15$$

$$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$$

以下解法同例7。

双十字相乘法

【例 9】将$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$因式分解。

分析：命题特征是含x、y的二次项、一次项和常数项，有三组可做十字相乘的因素，即x^2、$2x$、-3，$-8y^2$、$+14y$、-3，和x^2、$2xy$、$-8y^2$。在这三个里可用两个做十字相乘，第三个用来检验上述两个十字相乘。

解：$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & -2 & & +3 \\ & \times & & \times & \\ 1 & & 4 & & -1 \end{array}$$

上面对$x^2+2xy-8y^2$和$-8y^2+14y-3$各用了一次十字相乘。最后观察一下x^2+2x-3对上述的十字相乘是否正确，上述对x^2+2x-3有

$$\begin{array}{cc} x^2+2x-3 & \\ 1 & +3 \\ 1 & -1 \end{array}$$

正确。

故 $$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$$
$$=(x-2y+3)(x+4y-1)$$

【例10】将$x^2-3xy-4y^2-x+4y$因式分解。

解：$x^2-3xy-4y^2-x+4y+0$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \times & -1 \\ 1 & & -4 & & 0 \end{array}$$

$\therefore\quad x^2-3xy-4y^2-x+4y=(x+y-1)(x-4y)$

这类题的因式分解也可用待定系数法，但没有双十字相乘法方便。

解方程求根法

【例11】将$3x^2+11x+6$因式分解

解：令$3x^2+11x+6=0$。

解之得 $x_1=-\dfrac{2}{3}$，$x_2=-3$

$$\therefore\quad 3x^2+11x+6=3(x-x_1)(x-x_2)=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+3)$$
$$=(3x+2)(x+3)$$

这种方法沟通了多项式与一元二次方程之间的关系。学好多项式的因式分解，那么解相应的方程就不困难了；反之，会解一元方程，那么相应多项式的因式分解也就容易解决了。

以前的因式分解，都是在实数集合内进行的；今后，将把因式分解扩展到复数集合中。

2.函数 本章只牵涉到幂函数中的一种，即形如$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$的函数(其中$a_n\neq 0$)。一般，常用$f(x)$

表示函数，其中 f 是对应规律（或叫映射）。函数$f(x)$的意义，是在一定范围内，自变量x每一个值，按 f 这种对应，都有确定函数$f(x)$的值。如$f(x)=x+5$，对$x=1$，$f(1)=6$；$f(x)=x^2-3$，对$x=2$，$f(x)=1$.可见，f 表示的就是对自变量实行的运算。如果已知$f(x)$，求$f(a)$，就是用 a 代替$f(x)$解析式中的自变量 x，进行 f 运算，就得$f(a)$。

【例 1】已知$f(x)=x^2-2$.求$f(x+1)$.

解：$f(x+1)=(x+1)^2-2=x^2+2x-1$

【例 2】已知$f(x+1)=x^2+2x-1$,求$f(x)$.

分析：这里$f(x)$和$f(x+1)$中的 f 是相同的，因此，只要知道"x^2+2x-1"是对"$x+1$"实行怎样的运算后得到的，就可求出$f(x)$了。

解：
$$\begin{aligned} f(x+1)&=x^2+2x+1-1\\ &=(x+1)^2-1 \end{aligned}$$
$$\therefore \quad f(x)=x^2-1$$

【例 3】已知$f(x+3)=x^2+5x-6$，求$f(x+1)$.

解：
$$\begin{aligned} f(x+3)&=x^2+6x+9-x-9-6\\ &=(x+3)^2-x+3-9-6-3\\ &=(x+3)^2-(x+3)-18 \end{aligned}$$
$$\therefore \quad f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)-18$$

当函数$f(x)$的为 0，即

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

时，便成为一元 n 次方程。由此，可进一步明确一元 n次多项式和一元高次方程之间的关系。本章就要用到这种关系。

3.方程　迄今为止，我们学习的方程，未超出一元二次方程。至于分式方程、无理方程和一些超越方程，也都是通

过换元法归到解一元一次方程或一元二次方程再求解。本章欲学习一元高次（$n>2$）方程，为此，须要掌握与其相关联的一元二次方程的理论和解法。

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的求根公式，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 中，当判别式 $b^2-4ac<0$ 时，在实数集合中就没有解了。本章是在复数集合中来研究复系数一元 n 次方程，因此，一元二次方程总有二个根（或重根）。对于求解一元 n 次方程的主导思想是降次，只要将高次方程降次到二次，就不难求它的全部解了。

一元一次方程有且仅有一个根，一元二次方程在复数集合中有且仅有二个根，那么一元 n 次方程在复数集合中是否应该有且仅有 n 个根呢？答案是肯定的。

另外，一元二次方程（$ax^2+bx+c=0$）的根和系数（在实数集合中）的关系服从韦达定理。设 x_1，x_2 是一元二次方程的二个根，则有

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

那么对于一元 n 次方程来讲，在复数集合中是否也应有类似的根与系数的关系呢？答案也是肯定的。

我们可通过求一元二次方程的根来将二次三项式因式分解。即设 x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，则二次三项式 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 即可因式分解。

当我们把实数域扩大到复数域，再来讨论一元多项式和一元 n 次方程的问题，那就是我们这一章新教材的内容了。在

系统归纳了多项式、函数、方程的有关概念以后，再继续学习本章内容就容易了.

二、从"线"到"面"，弄清知识之间的关系

本章内容之间的关系甚为密切，例如多项式的根与一元 n 次方程的根之间，多项式的因式分解与一元 n 次方程求根之间，多项式的余数定理与函数求值之间等等，都有着密切的关系. 因此教师在讲授每一项内容时，都要有意识地渗透相关的知识. 这样讲授的知识不仅便于学生记忆，更便于系统、完整地掌握.

知 识 反 馈

一、是非题

将下列命题中正确的画"√"，错误的画"×".

1. $f(x)=5x^4-x^2+6$ 除以 $x+1$ 的余数为 $f(1)$.　(　　)

2. 5 是零次多项式　(　　)

3. 数 $a\in C$ 是零次多项式　(　　)

4. 数 0 是零多项式　(　　)

5. 如果多项式 $f(x)=g(x)+q(x)$，其中 $g(x)$ 与 $q(x)$ 也是多项式. 若 $x-a$ 不是 $g(x)$ 的因式，那么 $x-a$ 也不是 $f(x)$ 的因式.　(　　)

6. 如果多项式 $f(x)=(x-a)q(x)$，其中 $q(x)$ 也是多项式. 若 $x-a$ 不是 $g(x)$ 的因式，那么 $x-a$ 也不是 $f(x)$ 的因式.　(　　)

7. 整系数多项式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 有因式 $x-q(q\in Z)$ 的充分必要条件是 q 一定是常数项 a_0 的约数.　(　　)