中学数学解题丛书

平面解析几何

解题错误分析

邵旭
冯建国　编著

黑龙江科学技术出版社

平面解析几何
解 题 错 误 分 析

邵 旭 冯建国 编 著

黑龙江科学技术出版社

一九八六年·哈尔滨

责 任 编 辑：翟明秋
封 面 设 计：洪 冰

平面解析几何解题错误分析

邵 旭 冯建国 编 著

黑 龙 江 科 学 技 术 出 版 社 出 版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
齐齐哈尔第一印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

787×1092毫米32开本5.25印张 110千字
1986年5月第1版·1986年5月第1次印刷
印数：1——11,110册

书号：13217·149 定价：0.89元

前　　言

数学是一门应用广泛的基础学科，是学习和研究其他科学的有力工具。数学是中学的一门基础课，学好中学数学对于学生接受更高深的科学知识和参加生产劳动都有十分重要的作用。

解题在数学学习中有着特殊重要的意义，解题能力是掌握知识程度的主要标志。在数学里，才智就是解决问题。有些学生虽然对概念、定理背得烂熟，但是在解答非常简单的题目时却会糊涂起来。有些学生只具有一般的解题本领，一遇到形式不熟或没见过的题目，就茫然不知所措或者错误地进行解答。

在解答数学问题时，常常出现的典型性错误有：概念不清造成的概念性错误；忽视条件、错用结论造成的知识性错误；违反逻辑规律造成的逻辑性错误；以偏概全、以特殊代一般造成的方法性错误等等。

为了学会解题，除了弄清概念和做解题练习以外，一个很好的办法是分析题目的错误解答，寻求正确的解题方法和规律。哈尔滨市数学学会为了帮助中学生从解答数学问题的错误中汲取经验教训，寻找解题方法和规律，提高解题能力；同时，也为了给中学数学教师提供一些在教学中分析典型错

例的方法，以指导学生解答题目，提高教学质量，特组织哈尔滨市几位有丰富教学经验和长期从事教学研究的同志，编著了这套中学数学解题错误分析丛书。

本套丛书是根据中学数学教学大纲，配合通用教材分科按章编写的。书中所列题目具有典型性，错误解法具有普遍性。这套丛书共分五册，高中代数由时承权、戴再平编著；立体几何由王万祥编著；平面解析几何由邵旭、冯建国编著；初中代数由王翠满、马明珠编著；平面几何由唐格森、王国器编著。哈尔滨市教育学院王万祥副院长和我审阅了各册原稿。

书中错误之处，敬请广大读者批评指正。

哈尔滨市数学学会秘书长
黑龙江大学数学系副教授 颜秉海

1985年4月

目　　录

第一章 直 线

学习基本要求

这一章首先要求在理解和掌握平面直角坐标系的意义，以及坐标平面内的点和有序实数对之间的一一对应关系的基础上，理解和掌握有向线段的数量、定比分点、两点间的距离等概念和有关的计算公式，这些概念和公式是点和线段等基本几何元素数量化、解析化的基础。

接着要求理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握用直线上两点的坐标表示直线斜率的公式，以及直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式和一般形式。从而理解直线的方程都是关于x、y的一次方程，关于x和y的一次方程都表示一条直线。这样，我们就初步建立了关于直线与方程的关系的认识。

建立直线的方程之后，要求理解和掌握通过直线的方程研究有关直线的几何性质的方法，即研究两条直线的各种位置关系，两条直线所成的角，以及求点到直线的距离。这种通过研究方程来研究几何图形性质的方法，就是解析几何的基本方法。

学习这一章时，往往容易忽视那些最基本的概念，比如"有向线段的数量"，这就可能引起许多错误。因为所有的

几何图形都可以看成是点的集合，而平面内的点的坐标就是关于有向线段的数量的概念，所以这一概念在解析几何中是到处存在的，应很好地理解和掌握。

直线的斜率和截距是表示直线位置的重要特征数值，常常用它们来建立直线方程、讨论直线的位置关系，应用很广泛。对于这两个概念（它们的意义，存在的条件）要正确理解，以免解题出现错误。

解题错误分析

例 1 求抛物线 $y=(x-1)(x-5)$ 的对称轴。

【错误解法】 设 $y=0$，解得

$$x_1=1,\ x_2=5,$$

可知抛物线与 x 轴交于 $A(1,0)$、$B(5,0)$ 两点。设 M 为线段 AB 的中点，

$\because\ |AB|=5-1=4,\ \ |AM|=2,$

$\therefore\ M$ 点的坐标为 $(2,\ 0)$。

所以抛物线的对称轴是直线 $x=2$。

【错因分析】 上面的解法中，$|AM|$ 表示线段 AB 的长的一半，但这并不是 M 点的横坐标。x 轴上的点的横坐标是以原点 o 为始点，以这点为终点的有向线段的数量。所以 M 点的横坐标是 OM 的数量。

【正确解法】 设 $y=0$，解得

$$x_1=1,\ x_2=5.$$

可知抛物线与 x 轴交于 $A(1,\ 0)$、$B(5,\ 0)$ 两点。所以抛物

线的对称轴是直线。

$$x=\frac{1+5}{2}=3.$$

例 2 设抛物线 $y=x^2-4x-5$ 与 x 轴的两个交点为 A、B，抛物线顶点为 C，求△ABC的面积。

【错误解法】 解方程

$$x^2-4x-5=0,$$

得 $x_1=-1$，$x_2=5$

$\therefore$ $A(-1,\ 0)$,

$B(5,\ 0)$

$|AB|=OA+OB$

$=-1+5=4.$

又由抛物线顶点坐标公式 $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{2a}\right)$ 求得 C 点的坐标 $(2,\ -9)$，所以△ABC的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times(-9)=-18.$$

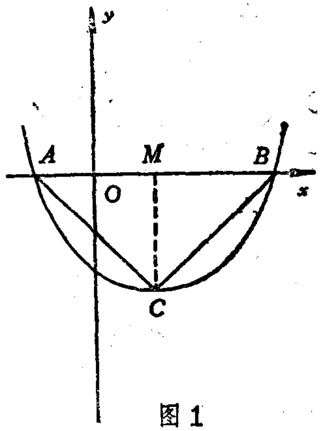

图 1

【错因分析】 这里有两处错误（如图）

（1）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CM|$,

但 $|AB|\neq OA+OB$.

OA、OB都是有向线段的数量，而线段AB的长$|AB|$是一个不考虑方向的几何量。由于A、B分别位于原点两侧，

$\therefore$ $|AB|=|OA|+|OB|=1+5=6$, .

或 $|AB|=|x_B-x_A|=|5-(-1)|=6.$

（2）$\triangle ABC$的面积是一个不考虑方向的几何量，AB边上的高是C到直线AB的距离 $|-9|$，而不是C点的纵坐标(-9)。

【正确解法】 解方程 $x^2-4x-5=0$，

得 $x_1=-1$，$x_2=5$。

$\therefore$ $A(-1,\ 0)$，$B(5,\ 0)$，

$|AB|=|5-(-1)|=6$。

又由抛物线顶点坐标公式求得 $C(2,\ -9)$。所以C到直线AB的距播 $|CM|=|-9|=9$，

$$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 9=27。$$

例3 求到 $A(5,\ 2)$、$B(11,\ 2)$ 两点距距相等的点的轨迹。

【错误解法】 设到$A(5,\ 2)$、$B(11,\ 2)$两点距离相等的点为 $P(x,\ y)$，于是有

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-11)^2+(y-2)^2},$$

两边平方 $(x-5)^2+(y-2)^2=(x-11)^2+(y-2)^2$，

$(x-5)^2=(x-11)^2$，

$x^2-10x+25=x^2-22x+121$，

$12x=96$，

$x=8$。

由于方程中 y 已经消失，故 P 点的轨迹为 x 轴上的点$(8,0)$。

【错因分析】 点$P(x,\ y)$的轨迹是由 x、y 应满足的关系式而决定的。如果 $x=8$，$y=0$，那末 $P(x,\ y)$ 点的轨迹是一个点 $(8,\ 0)$；如果 $x=8$，$y\geqslant 0$，那末 $P(x,\ y)$点的

轨迹是过点（8，0）并垂直于x轴且在x轴上方的射线。现在由例3的题意解得$x=8$，而对于$P(x,\ y)$点的纵坐标y没有约束，这就是说y可为任意实数，意思就是$x=8$，$y\in R$，而并不是$x=8$，$y=0$。

【正确解法】 设到$A(5,\ 2)$、$B(11,\ 2)$两点距离相等的点为$P(x,\ y)$，于是有

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-11)^2+(y-2)^2},$$

解得 $x=8$。

故到$A(5,\ 2)B(11,\ 2)$两点距离相等的点的轨迹是横坐标为8，纵坐标可为任意实数的点的集合。它是过点（8，0）而垂直于x轴的一条直线（如图）。

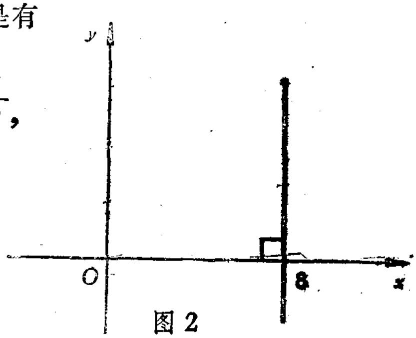

图 2

例 4 求在x轴上，且与点$B(0,\ 15)$的距离为17的点A。

【错误解法】 设$A(x,\ 0)$点的位置如图

$\because$ $|AB|=17$,

$|OA|=x$,

$|OB|=15$,

且 $\angle AOB=90°$

$\therefore$ $OA=\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{64}=8$,

所求A点的坐标为（8，0）。

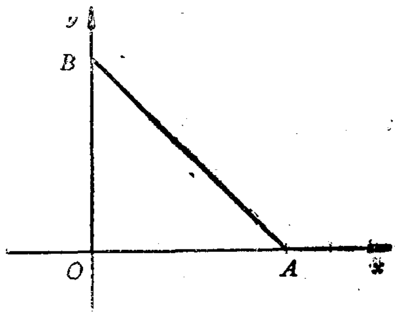

图 3

【错因分析】 据题意知 A 点在 x 轴上，但不一定在正半轴，也可能在负半轴上。此题应有两个解。

【正确解法】 设所求的坐标为$(a,0)$，据题意有方程：

$$\sqrt{(a-0)^2+(0-15)^2}=17,$$

$$a^2+15^2=17^2,$$

$$a^2=64,$$

$$a=\pm 8.$$

故所求点的坐标为$(-8,\ 0)$ 或 $(8,\ 0)$。

例 5 已知点 $A(3,\ 4)$，P 为有向线段 $\overline{OA}$ 的分点（O 是原点），且 $|OP|=1$。求分点 P 的坐标。

【错误解法】 如图

$\because\quad |OA|=\sqrt{3^2+4^2}=5.$

而 $\quad |OP|=1,$

$\therefore\quad |PA|=4,$

$\therefore\quad \lambda=\dfrac{|OP|}{|PA|}=\dfrac{1}{4}.$

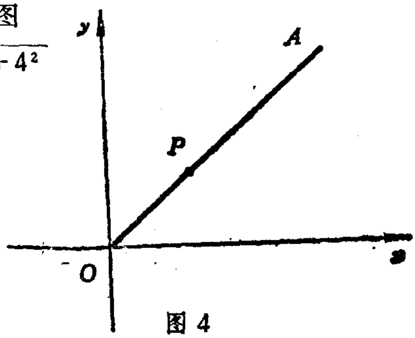

图 4

据定比分点坐标公式知

$$x=\frac{0+\frac{1}{4}\times 3}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5},$$

$$y=\frac{0+\frac{1}{4}\times 4}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}.$$

$\therefore$ 分点为 $P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

【错因分析】 上面的解法把 P 点理解为 $\overline{OA}$ 的内分点，但据题意，P 点也可能是线段 $\overline{OA}$ 的外分点，即点 P 在线段 AO 的延长线上。

【正确解法】 （1）如果 P 为 $\overline{OA}$ 的内分点，解法同前。

（2）如果 P 为 $\overline{OA}$ 的外分点，即 P 在线段 AO 的延长线上，这时

$$|OA|=\sqrt{3^2+4^2}=5,\quad |OP|=1,$$
$$|PA|=6,$$
$$\therefore\quad \lambda=\frac{OP}{PA}=-\frac{1}{6}.$$

据定比分点坐标公式知

$$x=\frac{0-\frac{1}{6}\times 3}{1-\frac{1}{6}}=-\frac{3}{5},$$

$$y=\frac{0-\frac{1}{6}\times 4}{1-\frac{1}{6}}=-\frac{4}{5}.$$

$\therefore$ P 点坐标为 $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

综合(1)(2)可知分点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

例 6 已知点 P_1 和 P_2 的坐标分别为 $(4,-3)$ 和 $(-2,6)$.

求适合条件$\dfrac{|P_1P|}{|PP_2|}=2$的点 P。

【错误解法】 $\because$ $\lambda=2$，据定比分点坐标公式

$$x=\frac{4+2\times(-2)}{1+2}=0,$$

$$y=\frac{-3+2\times 6}{1+2}=3.$$

$\therefore$ P的坐标是（0，3）。

【错因分析】 此题并没有说P点在线段P_1P_2上，因此不能说P点是P_1P_2的分点，不能用定比分点的坐标公式求P点的坐标。

【正确解法】 设P点的坐标为（x，y），据题意知

$$\frac{\sqrt{(4-x)^2+(-3-y)^2}}{\sqrt{(x+2)^2+(y-6)^2}}=2,$$

两边平方，去分母，整理得

$$x^2+y^2+8x-18y+45=0,$$

即 $(x+4)^2+(y-9)^2=52$。

$\therefore$ 适合条件的点P的集合是

$$M=\{(x,\ y)\,|\,(x+4)^2+(y-9)^2=52\}$$

学习了第二章之后就会知道，P点的轨迹不是一个点，而是一个以点（-4，9）为圆心、以$\sqrt{52}$为半径的圆。

例7 （1）直线l的倾斜角为α，且 $\mathrm{tg}\alpha=0$，求α。

（2）直线l的倾斜角为α，且$\mathrm{tg}\alpha=-3$，求α。

【错误解法】 （1）$\because \mathrm{tg}\alpha=0$，$\therefore \alpha=0°$ 或 $\alpha=180°$。

（2）$\because$ $\mathrm{tg}\alpha=-3$，$\therefore$ $\alpha=\mathrm{arc\,tg}(-3)$。

【错因分析】 （1）由于对直直的倾斜角的范围规定（$0°\leqslant\alpha<180°$）不明确而引起错误。

（2） $\because$ $0\leqslant\alpha<\pi$，

而 $\operatorname{arctg}(-3)<0$，

$\therefore$ $\alpha\neq\operatorname{arctg}(-3)$。

【正确解法】

（1） $\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=0\\0°\leqslant\alpha<180°\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha=0°$

（2）$\because$ $\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=-3\\0\leqslant\alpha<\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha=\pi-\operatorname{arctg}3$。

例8 求过点$P(2,3)$且与x轴的夹角为45°的直线方程。

【错误解法】 由于所求直线与x轴夹角为45°，所以它的斜率为

$$K=\operatorname{tg}45°=1,$$

代入点斜式，得

$$y-3=1\cdot(x-2),$$

即 $x-y+1=0$。

【错因分析】 直线与x轴的夹角θ是指这两条直线相交成四个角中不大于直角的角，所以$0°\leqslant\theta\leqslant90°$，而直线的倾斜角$\alpha$的范围是$0°\leqslant\alpha<180°$。因此当

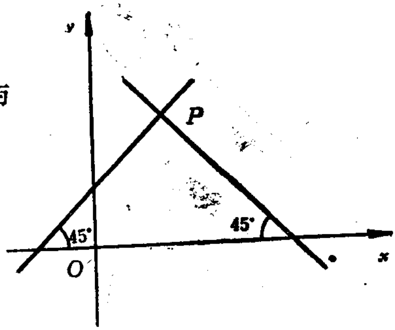

图5

直线的倾斜角 α 不大于直角时，$\alpha=\theta$；当直线的倾斜角 α 为钝角时，$\alpha=180°-\theta$。即当直线与 x 轴的夹角为 45° 时，有如图的两种情形，不能认为直线的倾斜角就是45°。

【正确解法】 设过点（2，3）的直线的斜率为 K，又 x 轴的斜率为0，由二直线的夹角公式得

$$\mathrm{tg}45°=\left|\frac{k-0}{1+k\cdot 0}\right|\Rightarrow k=\pm 1,$$

所求直线的方程为

$$y-3=\pm(x-2),$$

即 $x-y+1=0$ 或 $x+y-5=0$。

例 9 已知直线过点 $P(2,\ 3)$ 且在 x、y 轴上的截距相等，求此直线的方程。

【错误解法一】 据题意知所求直线的倾斜角应有 45° 或135°两种情形(如图)。这时 $|OA|=|OB|$，$|OC|=|OD|$，

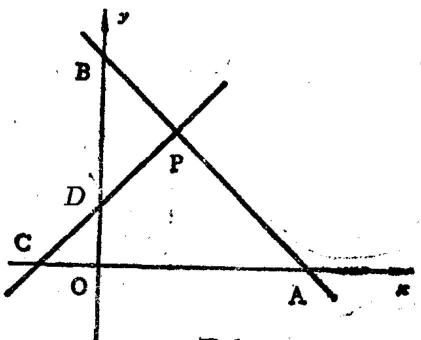

图 6

故所求直线方程为

$$y-3=\pm(x-2),$$

即 $x-y+1=0$ 或 $x+y-5=0$。

【错误解法二】 符合题意的直线的倾斜角只有135°一种情形，如图中的AB，这时$OA=OB$，所求直线方程为

$$y-3=-(x-2),$$

即 $x+y-5=0$。

【错因分析】 解法一的错误在于错误地理解了"截距"这一概念，把直线在坐标轴上的截距同直线与坐标轴的交点到原点的距离混同起来。其实直线在坐标轴上的截距并不是一种"距离"，而是坐标原点到直线与坐标轴的交点的有向线段的数量。因此，虽有$|OC|=|OD|$，但$OC\neq OD$，($OC=-OD$) 所以直线CD不符合题意，它不是所要求的直线。

解法二中虽然$OA=OB$，直线AB符合题意，但却遗漏了一解——直线OP的方程。直线OP在x、y轴的上截距都是零，是符合题意的。

【正确解法】 设所求直线的斜率为K（显然$K\neq0$），据点斜式有

$$y-3=k(x-2),$$

即 $kx-y+3-2k=0$ （1）

令 $y=0$，得到它在x轴上的截距为

$$x=\frac{2k-3}{K},$$

令 $x=0$，得到它在y轴上的截距为

$$y=3-2k.$$

据题意有