原国家教委《中学数学实验教材》

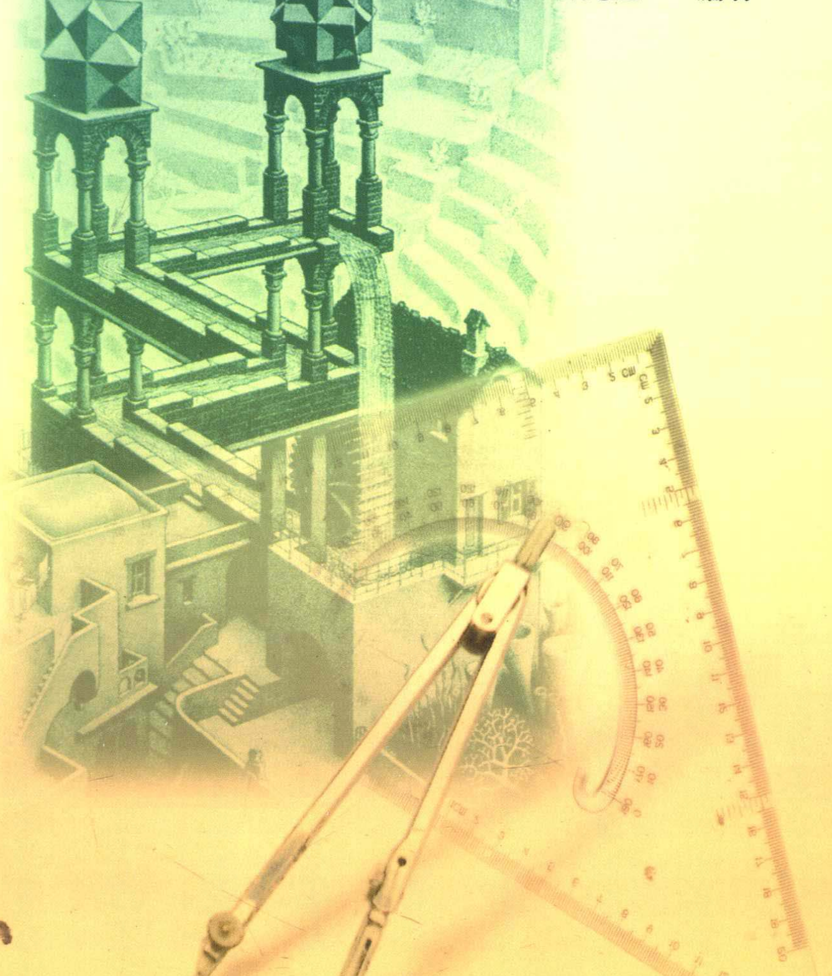
SHUXUE

全日制普通高级中学教科书(试验本·必修)

数学

SHUXUE 第三册(理)

教育部《中学数学实验教材》研究组 编著



北京师范大学出版社

原国家教委《中学数学实验教材》

全日制普通高级中学教科书（试验本·必修）

数学

第三册

（理）

教育部《中学数学实验教材》研究组 编著

北京师范大学出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

全日制普通高级中学教科书.数学.第3册(理)/教育部《中学数学实验教材》编写组编著.—北京:北京师范大学出版,2002.4

ISBN 7-303-06110-X/G.4466

Ⅰ.全… Ⅱ.教… Ⅲ.数学课-高中-教材
Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第027647号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街19号 邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
丰润印刷有限公司印装 全国新华书店经销
开本:787mm×1 092mm 1/16 印张:20 字数:510千字
2002年5月第1版 2002年5月第1次印刷
印数:1～25 000 定价:15.80元

前　言

这套高中数学教材是在原国家教委基础教育司的组织领导下，于1980年初，根据美国加州大学伯克莱分校数学系项武义教授的设想和初纲，由本教材实验研究组广泛听取了专家和中学数学界有丰富经验的教研员、教师的意见，集体讨论、分工编写而成的，并从1982年开始，在全国近20个省、市、自治区进行了十多年的实验教学。在吸取各地使用教材的宝贵经验的基础上，前后经过三次调整修订，于1993年正式出版，并被原国家教委推荐为全国高中数学教学和中学数学教师进修的参考书。

这套教材还特别于1989～1992年进行了一轮有组织、有计划的严格实验教学，完善和充实了有益于中学生学好基础、提高能力的内容和训练，使教材更具有特色。经过三年教学，实验班进行了单独命题的高考，取得了优良成绩，同时也为这套教材的修订及教学参考书的编写提供了丰富的经验和资料。

这套教材的本次重新修订是总结十多年的教学实验经验和实验研究成果，根据教育部最新颁发的“全日制普通高级中学数学教学大纲（试验修订稿）”的精神，为适应我国当前高中数学教学改革的新形势和新要求而进行的。教材经教育部中小学教材审定委员会审读通过，全套教材尚待审查。

本教材的指导思想是：精简实用，返璞归真，顺理成章，深入浅出，注重实践能力和创新精神的培养。

精简实用——科学地体现了理论与实践的正确关系。由实践到理论就是由繁到简；精而简的理论才能以简驭繁。这是本教材的选材和教学处理上的原则。

返璞归真——就是着重于学习基础数学的本质，而不拘泥于抽象的形式。

顺理成章——就是从历史发展程序和认识的规律出发，自然地处理教材。力求顺理成章，注意提前渗透后面的重要概念和思想，为后面的学习预先做准备，使学习能比较顺利。同时，兼顾分析、综合、推理三种方法，以便真正掌握数学的精神实质和思想方法，培养思考能力。

深入浅出——只有学习到应有的深度才能浅出，其要点在于用易于接受的形式去掌握枢纽性的理论。

这套教材的教学目的、教学内容的确定和安排、教学中应注意的几个问题、教学测试和评估均与部颁大纲保持一致；教学内容和教学目标均源于大纲，包含了大纲中的必修与选修Ⅰ、Ⅱ的所有内容。教材中带“*”号的部分是有特色的辅助内容，供教学中结合实际、灵活掌握选学；教材中的阅读材料为“弹性”内容，供学有余力的学生阅读自学。

这套教材在本次修订中，特别注意了以下事项：

1. 注意保持了本教材的特色。

(1) 数学知识结构的整体性、系统性强。

(2) 重视数学上的通性、通法；在知识的展开上突出基本数学思想和数学方法，理论性较强；体现知识教学和能力培养的统一。

(3) 尽力体现和渗透现代数学观点，使教材的科学性和发展性达到较高水平。

2. 教材中增加了应用题、研究题、探索性课题，尽力重视个性品质、科学态度、创新精神的培养和辩证唯物主义的教育。

3. 在内容上，删减了本教材原有的超纲内容，降低了难度。在保持原有教材特色的基础上，着眼于代数、几何、分析、概率与统计 4 个基础学科，选其精要基础的内容；但在教材的编排体系上，采取与部颁大纲基本一致的不分学科、统一处理、穿插安排的系统。

这套教材分 3 册共 6 本，其主要内容分别是：

第一册（上）　集合与逻辑初步；不等式；函数。

第一册（下）　指数函数与对数函数；三角函数。

第二册（上）　平面向量；直线和圆的方程；圆锥曲线方程。

第二册（下）　立体几何基础；数列。

第三册（理）　复数；排列、组合及二项式定理；概率与统计初步；极限与连续；导数与微分；求和与积分。

第三册（文）　排列、组合及二项式定理；概率与统计初步；极限与导数。

第三册是供高中三年级使用的全一册，其中，第三册（理）的内容是大纲中的部分必修内容加选修Ⅱ，供高三理工方向的学生使用；第三册（文）的内容是大纲中的部分必修内容加选修Ⅰ，供高三文、实方向的学生使用。

参加修订编写的有丁尔陞、李建才、高存明、罗声雄、邱万作、万庆炎、叶尧城等同志。参加本册修订的还有程旷、王松浦。

在修订过程中，程旷、张伦传等同志都仔细地审阅过本册部分教材，并提出了许多宝贵意见，在此深表谢意。

热忱地欢迎大家使用这套教材，希望提出意见与建议，为提高我国数学基础教育水平共同努力。

教育部《中学数学实验教材》研究组

2000 年 3 月

目　录

第十一章

复　数

我们知道，在实数集中，负数不能实施开平方运算，所以，即使像 $x^2+1=0$ 这样简单的方程也无解可求. 由于解方程的需要，实数集必须进一步扩展. 在16世纪时就出现了复数. 200多年以后，复数才逐步形成了完整的理论，并得到广泛应用.

复数的初步知识是初等数学的基础知识，也是进一步学习高等数学的基础. 本章主要学习复数的概念、运算及其简单应用.

§1　复数及其运算

1.1　复数的概念

我们已经学过自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q** 和实数集 **R**，它们之间有如下的真包含关系：

$$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}.$$

数集的每一次扩展，都有实际的需要，同时也解决了数学运算中出现的矛盾. 例如，分数解决了在整数集中不能整除的矛盾；负数解决了在正有理数集中不够减的矛盾；无理数解决了开方开不尽的矛盾. 扩展以后所得到

的新数集，既保留了原来数集的运算性质，又增加了一些新的功能.

数集扩展到实数集 $\mathbf{R}$ 以后，像 $x^2=-1$ 这样简单的方程在实数集内还是无解，因为无论 x 取什么实数，它的平方都不等于 -1. 为了使这样一类方程有解，还需要将实数集进一步扩展.

为此，人们引进符号 i 来表示 -1 的平方根. 规定：

(1)它的平方等于 -1，即 $\mathrm{i}^2=-1$；

(2)实数与它进行四则运算时，保持实数原有的运算通性.

在这种规定下，i 就是 -1 的一个平方根，$-\mathrm{i}$ 是 -1 的另一个平方根. 这样，方程 $x^2=-1$ 就有两个解，记作 $x=\pm\mathrm{i}$. 而对于任一负数 a，它的平方根可写作 $\pm\sqrt{-a}\,\mathrm{i}$ $(a<0)$.

用符号 i 表示的新数，叫做**虚数单位**. i 与实数进行运算，使数的范围有了新的扩展.

设 a,b 是实数，将 i 与 b 相乘，再与 a 相加，运用乘法交换律和加法交换律，则所得结果可以写成 $a+b\mathrm{i}$.

形如 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的记号，叫做**复数**. 全体复数所成的集合叫做**复数集**，一般用字母 $\mathbf{C}$ 表示：

$$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R}\}.$$

复数通常用字母 z 表示，即 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$. 不同的复数用 $z_1,z_2,z_3,\cdots$表示. 把复数表示成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式，叫做复数的代数形式.

对于复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，当且仅当 $b=0$ 时，z 是实数；特别地，当且仅当 $a=b=0$ 时，z 就是实数 0. 由此可见，实数集是复数集的真子集，即 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$. 当 $b\neq0$ 时，z 叫做**虚数**；当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时，$z=b\mathrm{i}(b\neq0)$ 叫做**纯虚数**.

复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 的表达式中，a 叫做复数 z 的**实部**，记作 $\mathrm{Re}(z)$；b 叫做复数 z 的**虚部**，记作 $\mathrm{Im}(z)$.

这样，复数 $z=a+bi$ 可以分类如下：

$$\text{复数 } z\begin{cases}\text{实数 } a(b=0),\\ \text{虚数 } a+bi(b\neq 0)(\text{当 } a=0 \text{ 时}, z=bi \text{ 为纯虚数}).\end{cases}$$

如果两个复数的实部相等，虚部互为相反数，那么这两个复数叫做**共轭复数**. 复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示，设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$. 显然，一个实数的共轭复数仍是它自身.

例 1 写出下列各复数的实部和虚部以及这些复数的共轭复数：

(1)$2+3i$； (2)$3-2i$； (3)4； (4)$5i$.

解 (1)$\mathrm{Re}(2+3i)=2$，$\mathrm{Im}(2+3i)=3$，

$\overline{2+3i}=2-3i$.

(2)$\mathrm{Re}(3-2i)=3$，$\mathrm{Im}(3-2i)=-2$，

$\overline{3-2i}=3+2i$.

(3)$\mathrm{Re}(4)=4$，$\mathrm{Im}(4)=0$，$\bar{4}=4$.

(4)$\mathrm{Re}(5i)=0$，$\mathrm{Im}(5i)=5$，$\overline{5i}=-5i$.

例 2 实数 m 取什么数值时，复数

$$z=m^2+m+(m^2-1)i$$

是：(1)实数？(2)虚数？(3)纯虚数？

解 因为 $m\in\mathbf{R}$，所以

$$\mathrm{Re}(z)=m^2+m,\ \mathrm{Im}(z)=m^2-1.$$

(1)当 $m^2-1=0$，即 $m=\pm1$ 时，复数 z 是实数.

(2)当 $m^2-1\neq0$，即 $m\neq1$ 且 $m\neq-1$ 时，复数 z 是虚数.

(3)当 $m^2+m=0$，且 $m^2-1\neq0$，即 $m=0$ 时，复数 z 是纯虚数.

如果两个复数的实部和虚部分别相等，那么我们就说这两个**复数相等**. 这就是说，设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，则有

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d.$$

特别地，

$$a+bi=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ 且 } b=0.$$

一般地，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小（仅当两个复数都是实数时才能比较大小）.

例 3 如果 $(7-3x)+3y\mathrm{i}=2y+2(x+2)\mathrm{i}$，其中 x，$y\in\mathbf{R}$，求 x，y 的值.

解 根据复数相等的定义，得方程组

$$\begin{cases}7-3x=2y,\\3y=2(x+2).\end{cases}$$

解得 $x=1, y=2$.

练 习

1. 写出下列各复数的实部和虚部以及这些复数的共轭复数：

$-2+5\mathrm{i}$，$-7\mathrm{i}$，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$，$-\sqrt{5}$，$-6\mathrm{i}$.

2. 判断当实数 m 取何值时，复数

$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)\mathrm{i}$

是：(1)实数；(2)虚数；(3)纯虚数；(4)零.

3. 求适合下列等式的实数 x 与 y 的值.

(1) $(x-2y)+(2x+3y)\mathrm{i}=3-2\mathrm{i}$；

(2) $3x+y+3=(x-y-3)\mathrm{i}$；

(3) $(x+y-3)+(x-y-1)\mathrm{i}=0$.

1.2 复数的运算

一、复数的四则运算

两个复数加法和乘法运算的法则规定如下：

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，则

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})\\&=(a+c)+(b+d)\mathrm{i};\\z_1\cdot z_2&=(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})\end{aligned}$$

$=ac+bci+adi+bdi^2$

$=(ac-bd)+(bc+ad)i.$

显然，两个复数的和、积仍然是一个复数.

容易验证，复数的加法和乘法运算满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律，即对于任何复数 z_1, z_2, z_3，有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$
$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),$$
$$z_1 \cdot z_2=z_2 \cdot z_1,$$
$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3=z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$
$$z_1 \cdot (z_2+z_3)=z_1 \cdot z_2+z_1 \cdot z_3.$$

已知 $z=a+bi$，如果存在一个复数 z'，使

$$z+z'=0,$$

那么 z' 叫做 z 的**相反数**，记作 $-z$. 显然，根据加法法则，$-z$ 存在且惟一，

$$-z=-a-bi.$$

已知 $z=a+bi$，如果存在一个复数 z'，使

$$zz'=1,$$

那么 z' 叫做 z 的**倒数**，记作 $\frac{1}{z}$. 根据乘法法则，当 $z\neq 0$ 时，$\frac{1}{z}$ 存在且惟一，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i.$$

有了相反数和倒数的概念后，我们再规定，复数的减法是加法的逆运算，复数的除法是乘法的逆运算，容易得到复数的减法和除法的运算法则.

设 $(c+di)+(x+yi)=a+bi$，则复数 $x+yi$ 叫做复数 $a+bi$ 减去复数 $c+di$ 的差，记作

$$(a+bi)-(c+di).$$

由 $(c+di)+(x+yi)=a+bi$，可得

$$[(c+di)+(x+yi)]+(-c-di)$$
$$=(a+bi)+(-c-di),$$

即 $$x+yi=(a-c)+(b-d)i,$$

得 $$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

设 $(c+di)(x+yi)=a+bi(c+di\neq 0)$，则复数 $x+yi$ 叫做复数 $a+bi$ 除以复数 $c+di$ 的商，记作

$$(a+bi)\div(c+di) \quad \text{或} \quad \frac{a+bi}{c+di}.$$

由 $$(c+di)(x+yi)=a+bi \quad (c+di\neq 0),$$

得 $$[(c+di)(x+yi)]\cdot\frac{1}{c+di}=(a+bi)\cdot\frac{1}{c+di},$$

从而 $$x+yi=(a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2}+\frac{-d}{c^2+d^2}i\right),$$

于是，

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=(a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2}+\frac{-d}{c^2+d^2}i\right)\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.\end{aligned}$$

概括地说，两个复数进行加法、减法、乘法运算，可以像代数式运算那样进行，只是在得到 i^2 时，把 i^2 用 -1 替代. 两个复数的除法运算(仍约定除数不能为 0)，只要把除式用分式形式表示以后，将分子和分母同乘以分母的共轭复数，就可转化为乘法运算.

例 1 设 $z_1=3+2i$，$z_2=1-4i$. 计算：

(1)z_1+z_2；(2)z_1-z_2；(3)$z_1\cdot z_2$；(4)$z_1\div z_2$.

解 (1)$z_1+z_2=(3+2i)+(1-4i)=4-2i$.

(2)$z_1-z_2=(3+2i)-(1-4i)=2+6i$.

(3)$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(3+2i)\cdot(1-4i)\\&=3+2i-12i+8\\&=11-10i.\end{aligned}$$

(4)$$\begin{aligned}z_1\div z_2&=\frac{3+2i}{1-4i}\\&=\frac{(3+2i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}\\&=\frac{(3-8)+(2+12)i}{17}\\&=-\frac{5}{17}+\frac{14}{17}i.\end{aligned}$$