21世纪高等院校教材

大学工科·数学教材系列

高等数学

（下 册）

西北工业大学高等数学教材编写组 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

大学工科·数学教材系列

高等数学

（下册）

西北工业大学高等数学教材编写组 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是在教育大众化的新形势下，根据编者多年的教学实践，并结合“高等数学课程教学基本要求”而编写的.

全书分上、下两册. 上册内容为一元函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何等7章. 上册书末附有上册部分习题答案与提示、极坐标系简介、二阶和三阶行列式简介、几种常用的曲线、积分简表. 下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程等5章. 下册书末附有下册部分习题答案与提示、记号说明.

本书力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂. 全书有较多的例题，便于自学，同时注意尽量多给出一些应用实例.

本书可供高等院校工科类各专业的学生使用，也可供广大教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下册)/西北工业大学高等数学教材编写组编. —北京：科学出版社，2005

21世纪高等院校教材(大学工科·数学教材系列)

ISBN 7-03-016037-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 西… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第085550号

责任编辑：李鹏奇/责任校对：李奕萱

责任印制：安春生/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2005年8月第一次印刷 印张：22 1/2

印数：1—5 000 字数：432 000

定价：58.00元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉)

前　言

本书是按照新形势下教材改革的精神，集编者多年的教学经验编写而成的. 本书遵循的编写原则是：在教学内容的深度广度上与现行的高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”大体相当，渗透现代数学思想，加强应用能力的培养.

在本书的编写过程中，我们作了以下一些改革的尝试：

1. 为更好地与中学数学教学相衔接，上册从一般的集合、映射引入函数概念.

2. 为有利于培养学生的能力和数学素养，渗透了一些现代数学的思想、语言和方法，适当引用了一些数学记号和逻辑符号.

3. 为培养学生的发散思维能力，本书对重要的概念和定理，尽可能地从几何直观或物理的实际背景提出问题，然后经过分析和论证上升到一般的概念和结论，最后归纳出定义和定理. 目的在于培养学生的创新意识和创新能力.

4. 注重微积分的应用. 本书除了一些经典的几何或物理问题外，还尽可能地举一些来自自然科学、工程技术领域和日常生活的问题作为例题和习题，尤其注意添加了一些经济方面的应用实例，以培养学生用数学方法解决实际问题的意识、兴趣和能力.

5. 对微积分的教学内容作了部分调整，使之更符合人的思维习惯，使教学系统性更强，便于学生消化吸收.

6. 增添了数学模型教学的内容，强调了微积分本身的数学模型特征，目的在于启发应用意识，提高应用能力，促进学生知识、能力和素质的融合.

7. 书中给出了微积分中所涉及到的 30 多位数学家的介绍.

8. 为了控制课时数，有些内容用楷体字印刷，或在标题上加了“*”号，表示这些内容可供学生阅读自学.

本书分上、下两册，上册是一元函数微积分和向量代数与空间解析几何，下册是多元函数微积分、级数和微分方程.

本书是在西北工业大学应用数学系和教务处以及很多教师的支持下编写的.

参加编写的教师分工如下:第一章、第三章(上册)由李云珠老师编写,第二章、第七章(上册)由郑红婵老师编写,第四章、第五章、第六章(上册)由符丽珍老师编写;第八章、第九章、第十章由肖亚兰老师编写,第十一章、第十二章由陆全老师编写,最后由肖亚兰、李云珠老师统纂定稿.西北工业大学的叶正麟老师担任了本书的主审,西安交通大学的王绵森老师和西北大学的熊必璠老师审阅了原稿,并提出不少改进意见,在此表示衷心的感谢.

限于作者水平,加之时间仓促,错误疏漏之处在所难免,恳请大家谅解.

编　者

2005年5月

目　　录

（下册）

第八章 多元函数微分法及其应用

此前我们所讨论的函数都是只依赖于一个自变量的函数，即一元函数. 但很多实际问题都与多个因素有关系，反映到数学上，就是某个变量依赖于多个变量的情形，因此我们要研究多元函数.

多元函数微分学是一元函数微分学的推广和发展，它们既有许多类似之处，又有不少本质差别. 本章，我们着重讨论二元函数，因为从一元函数发展到二元函数，许多方法和结论有着很大的不同，但是从二元函数到三元函数或者更多元函数却可以类推.

第一节 多元函数的极限与连续

一、平面点集 n 维空间

我们知道，研究一元函数的概念、理论与方法离不开 $\mathbf{R}^1$ 中的点集概念，例如邻域、开区间、闭区间等概念；类似地，要讨论多元函数，首先需要将上述一些概念加以推广. 我们先将有关概念从 $\mathbf{R}^1$ 推广到 $\mathbf{R}^2$ 中，然后引入 n 维空间，以便推广到一般的 $\mathbf{R}^n$ 中.

1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，称为平面点集，记作

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{ 所具有的性质 }P\}.$$

例如，平面上以 $(1,0)$ 点为圆心的单位圆内所有点的集合是

$$E_1=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2<1\}.$$

现在我们引入 $\mathbf{R}^2$ 中邻域的概念.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 面上的一个点，δ 是一个正数，所有与点 P_0 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的集合，称为点 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\},$$

或

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}.$$

从几何上看，$U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，以正数 δ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的集合. 在不强调半径 δ 时，可用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个

邻域.

点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}.$$

在不强调半径 δ 时，可写作 $\mathring{U}(P_0)$.

设 E 为平面点集，相对于 E，平面上的点可以分为三类：

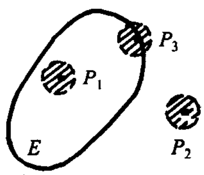

图 8.1

(1) **内点**：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称点 P 为 E 的内点（例如图 8.1 中，P_1 为 E 的内点）；

(2) **外点**：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称点 P 为 E 的外点（例如图 8.1 中，P_2 为 E 的外点）；

(3) **边界点**：如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称点 P 为 E 的边界点（例如图 8.1 中，P_3 为 E 的边界点）.

E 的边界点的全体，称为 E 的**边界**，记作 ∂E.

E 的内点必属于 E；E 的外点必定不属于 E；而 E 的边界点则可能属于 E，也可能不属于 E.

如果对于任意给定的正数 δ，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 中总有 E 中的点，则称点 P 为 E 的**聚点**.

由聚点的定义可知，点集 E 的聚点 P 本身，可以属于 E，也可以不属于 E.

例如，设点集

$$E=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<3\},$$

则满足 $1<x^2+y^2<3$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的内点；满足 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y) 都是 E 的边界点，它们都属于 E；满足 $x^2+y^2=3$ 的一切点 (x,y) 也是 E 的边界点，但它们不属于 E；满足 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 3$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的聚点.

如果点集 E 中的点都是内点，则称 E 为**开集**.

如果点集 E 关于 $\mathbf{R}^2$ 的余集 E^C 为开集，则称 E 为**闭集**.

如果点集 E 中的任意两点都可以用折线连接起来，并且该折线上的点都属于 E，则称 E 为**连通集**.

例如，集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<3\}$ 是开集；集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 3\}$ 是闭集；集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<3\}$ 既非开集，也非闭集；但这三个集合都是连通集.

连通的开集称为**区域**或**开区域**.

开区域连同它的边界一起所构成的点集称为**闭区域**.

例如，集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<3\}$ 是区域，而集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant$

3} 是闭区域.

设 O 是坐标原点，对于平面点集 E，如果存在某一正数 r，使得

$$E \subset U(O,r),$$

则称 E 为**有界点集**；否则称 E 为**无界点集**.

例如，集合 $\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3\}$ 是有界闭区域，集合 $\{(x,y) \mid x \geqslant 0\}$ 是无界闭区域.

2. n 维空间

设 n 为取定的一个自然数，我们将 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体所构成的集合称为 n **维(实)空间**，记作 $\mathbf{R}^n$，即

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R},\ i = 1,2,\cdots,n\}.$$

为了方便，$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有时也用单个字母 $\boldsymbol{x}$ 来记之，即 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2,\cdots,x_n)$. 当所有的 $x_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 都为零时，称这样的元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的**零元**，记为 $\mathbf{0}$. 在解析几何中，通过建立直角坐标系，$\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^3$) 中的元素分别与平面(或空间)中的点或向径成一一对应，故而 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也称为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**点**或一个 **n 维向量**(实际为向径). 与此相适应，称 $x_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个**坐标**或 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个**坐标**. 特别地，$\mathbf{R}^n$ 中的零元 $\mathbf{0}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**坐标原点**或 **n 维零向量**.

我们知道，研究一元函数 $f(x)$ 的性质，离不开对自变量 x 所处状态、变化方式及变化过程的描述. 同样，为了研究多元函数的性质，我们也应当在 $\mathbf{R}^n$ 中的元素之间建立联系，在 $\mathbf{R}^n$ 中引入线性运算及距离概念.

设 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个元素，$\lambda \in \mathbf{R}$，规定

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$
$$\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

$\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和点 $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离，记作 $P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，规定为

$$P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

显然，n 等于 2 或 3 时，$P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 与直角坐标系下平面或空间中两点间的距离相一致.

$\mathbf{R}^n$ 中元素 $\boldsymbol{x}$ 与零元 $\mathbf{0}$ 之间的距离 $P(\boldsymbol{x},\mathbf{0})$ 称为**向量 $\boldsymbol{x}$ 的模**，记作 $\|\boldsymbol{x}\|$ (在 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 中通常将 $\|\boldsymbol{x}\|$ 记成 $|\boldsymbol{x}|$，即

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

采用这一记号，结合向量的线性运算，便得

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

$\mathbf{R}^n$ 中定义了距离后，就可以进一步定义 $\mathbf{R}^n$ 中点的极限：

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$. 如果

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0,$$

则称点 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中趋于点 $\boldsymbol{a}$，记作 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$.

显然，$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{x}$ 的 n 个坐标同时满足

$$x_1\to a_1,\ x_2\to a_2,\ \cdots,\ x_n\to a_n.$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中引入了线性运算和距离之后，我们前面讨论过的带有明显几何背景的平面点集的一系列概念，就可以方便地推广到 $n(n\geqslant 3)$ 维空间中来，例如，设 δ 为某一正数，则 $\mathbf{R}^n$ 中的点集

$$U(\boldsymbol{P}_0,\delta)=\{\boldsymbol{P}\mid \|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0\|<\delta,\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{P}_0\in\mathbf{R}^n\}$$

就定义为 $\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{P}_0$ 的 δ 邻域. 以邻域为基础，可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点，进而定义开集、闭集、区域等一系列概念，这里不再赘述.

二、n 元函数　$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 的映射

1. n 元函数

在本章开始时已经提到，在许多实际问题中常遇到一个变量依赖于多个变量的情形，我们把它们归结为多元函数. 例如圆锥体的体积 V 与底半径 r 及高 h 有关，所以 V 是两个变量 r 和 h 的函数

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h\qquad (r>0,h>0).$$

又如三角形的面积 S 与三角形的两边 b 和 c 以及这两边的夹角 A 之间有关系式

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A\qquad (b>0,c>0,0<A<\pi).$$

即面积 S 是三个变量 b,c 和 A 的函数.

一般地，我们可以定义 n 元函数如下：

定义 8.1　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空子集，从 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的任一映射 f 称为定义在 D 上的一个 n 元（实值）函数，记作

$$f: D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

或

$$y=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ \boldsymbol{x}\in D.$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为**自变量**，y 称为因变量，D 称为函数 f 的**定义域**，$f(D)=\{f(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{x}\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**，并且称 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的子集

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)\mid y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$$

为函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$（在 D 上）的**图形**（或图像）.

当 $n=1,2,3$ 时分别称之为一元函数,二元函数,三元函数,记作

$$y=f(x),\quad x\in D\subset\mathbf{R}^1;$$
$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\subset\mathbf{R}^2;$$
$$u=f(x,y,z),\quad (x,y,z)\in D\subset\mathbf{R}^3.$$

二元函数的定义域是平面上的点集,或区域,例如

$$z=f_1(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

的定义域是平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

三元函数的定义域是三维空间中的点集,或空间域,例如

$$u=f_2(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{z^2-x^2-y^2}+\sqrt{z}$$

的定义域 $D=\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\}$ 是由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的球锥体(图 8.2).

当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为多元函数.关于多元函数的定义域,与一元函数相类似,我们作如下约定:在一般地讨论用解析式表达的多元函数 $u=f(\boldsymbol{x})$ 时,就以使这个解析式有意义的点 $\boldsymbol{x}$ 所组成的集合为这个多元函数的自然定义域.因而,对这类函数,它的定义域不再特别标出.

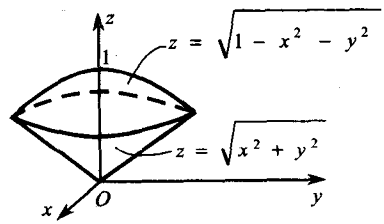

图 8.2

2. $\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^m$ 的映射

例 1 设 Ω 表示球形域:

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\},$$

在 Ω 的外部有一个质点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,质量是 m_0.质量为 m 的质点 $M(x,y,z)$ 在区域 Ω 里移动,则质点 M_0 对质点 M 的引力 F 可由万有引力公式表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(x,y,z)&=G\frac{m_0m}{|\overrightarrow{MM_0}|^2}\frac{\overrightarrow{MM_0}}{|\overrightarrow{MM_0}|}\\&=G\frac{m_0m}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}(x_0-x,y_0-y,z_0-z).\\&=(F_x,F_y,F_z),\qquad (x,y,z)\in\Omega,\end{aligned}$$

其中

$$F_x=G\frac{m_0m(x_0-x)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_y=G\frac{m_0m(y_0-y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_z = G\frac{m_0 m(z_0 - z)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

这里的函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 是一个定义在 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 上的向量值函数. 物理中像这样的例子还有很多,下面我们就给出这类向量值函数的定义.

定义 8.2 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空子集,从 D 到 m 维空间 $\mathbf{R}^m$ 的任一映射 f 称为定义在 D 上的一个 **n 元向量值函数**,记作

$$f: D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

或

$$(y_1,y_2,\cdots,y_m) = f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

当 $m=1$ 时,它就是我们前面讲到的 n 元函数. 当 $n=1$ 时,它就是一元向量值函数.

下面我们来看一些向量值函数的几何或物理意义,其中 x,y,z,t 表示自变量,u,v,w 表示函数值(向量值函数的坐标).

$\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^3$: 即 $\begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \\ w = w(t), \end{cases}$ 一般表示空间曲线的方程或空间中质点随时间运动的轨迹.

$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$: 即 $\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases}$ 可以是平面向量场,也可以表示平面到平面的坐标变换,或表示平面上的一族曲线(例如固定 $y=c$,即 $u=u(x,c)$, $v=v(x,c)$,就得到一条平面曲线).

$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$: 即 $\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \\ w = w(x,y), \end{cases}$ 一般表示一张曲面或一族空间曲线.

$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$: 即 $\begin{cases} u = u(x,y,z), \\ v = v(x,y,z), \\ w = \omega(x,y,z), \end{cases}$ 一般的空间向量场,空间坐标变换,或一族曲面.

例如,圆柱螺线的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \\ z = vt \end{cases} \qquad (t \geqslant 0),$$

其中 a,ω,v 为正的常数. 这是 $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^3$ 的一个映射,它把 $t(t \geqslant 0)$ 映射为 $\mathbf{R}^3$ 中的点(x,y,z).

球面参数方程

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ z = R\cos\varphi, \end{cases}$$

是 $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ 的一个映射.

一般地,$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射

$$f:(x_1,x_2,\cdots,x_n) \to (y_1,y_2,\cdots,y_m),$$

其像向量$(y_1,y_2,\cdots,y_m)$中的每个坐标 $y_j(j=1,2,\cdots,m)$ 都是原向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的函数,即

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2 = f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n), \end{cases}$$

因此,映射 f 又可以用 m 个联立的 Ω 到 $\mathbf{R}^1$ 的函数

$$f_j:\Omega \to \mathbf{R}^1,\ j=1,2,\cdots,m$$

来表示.

三、多元函数的极限

我们首先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 的极限问题. 与一元函数的极限概念相仿,如果在点 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中,即当

$$|PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0$$

时,对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A,我们就说 A 是函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0,\ y\to y_0$ 时的极限. 下面用"$\varepsilon-\delta$"语言描述这个极限概念.

定义 8.3 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点,如果存在常数 A,使得对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,只要点 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$,就有

$$|f(P)-A| = |f(x,y)-A| < \varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)$(在 D 上)趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的**极限**,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \quad 或 \quad f(x,y)\to A \quad ((x,y)\to(x_0,y_0)).$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A \quad 或 \quad f(P)\to A \quad (P\to P_0).$$

为了区别于一元函数的极限,我们称二元函数的极限为**二重极限**.

例 2 证明 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}\sin xy = 0(xy\neq 0)$.

证 因为 $\left|\dfrac{\sin xy}{xy}\right| \leqslant \left|\dfrac{xy}{xy}\right| = 1$,所以

$$\left|\frac{x^2+y^2}{xy}\sin xy\right| = |x^2+y^2| \cdot \left|\frac{\sin xy}{xy}\right| \leqslant x^2+y^2,$$

故对于任意给定的正数 ε,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时,就有

$$\left|\frac{x^2+y^2}{xy}\sin xy - 0\right| < \varepsilon$$

成立,从而得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}\sin xy = 0.$$

应当注意,按照二重极限的定义,必须当动点 $P(x,y)$ 在 D 上以任意的方式趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 都无限接近于 A,才有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

如果 $P(x,y)$ 在 D 上以某种特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 趋于常数 A,那么还不能断定 $f(x,y)$ 存在极限. 但是,如果当 $P(x,y)$ 在 D 上以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 趋于不同的常数,那么便能断定 $f(x,y)$ 的极限不存在.

例 3　考查函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时极限是否存在.

解　这个函数在原点的任何去心邻域内有定义. 显然,当点 (x,y) 沿着 x 轴或 y 轴趋于 $(0,0)$ 点时,$f(x,y)\to 0$. 并且当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$(k 为任意非零常数)趋于 $(0,0)$ 点时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2} = 0,$$

这表明,点 (x,y) 沿任意直线趋于 $(0,0)$ 点时,$f(x,y)$ 都趋于常数 0,然而,这还不能断言 $f(x,y)$ 以 0 为极限. 事实上,当点 (x,y) 沿抛物线 $y=kx^2$ 趋于 $(0,0)$ 点时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着 k 的值的不同而改变的,所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是不存在的.

以上关于二元函数的极限概念,可相应地推广到 n 元函数 $u=f(P)$ 即 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上去.

多元函数极限的定义与一元函数极限的定义有着完全相同的形式,这使得有关一元函数的极限运算法则都可以平行地推广到多元函数上来,但求二元函数的极限却通常比求一元函数的极限困难得多,不过,对有些二元函数的极限,可通过变量代换把它化为一元函数的极限,或者利用夹逼定理等方法求出.

例 4　求函数 $\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限.

解　令 $\rho^2 = x^2 + y^2$，则 $(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow \rho \to 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin\rho^2}{\rho^2} = 1.$$

例 5　证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

证　因为 $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$，所以

$$0 \leqslant \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0)),$$

从而由夹逼定理得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$$

例 6　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(1+xy)}{y}$.

解　令 $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+xy)}{y}$，则函数 $f(x,y)$ 的定义域 $D = \{(x,y) \mid y \neq 0, xy > -1\}$，$P_0(1,0)$ 为 D 的聚点.

由乘积的极限运算法则得

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(1+xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \left[\frac{\ln(1+xy)}{xy} \cdot x\right]$$

$$= \lim_{xy\to 0} \frac{\ln(1+xy)}{xy} \cdot \lim_{x\to 1} x = 1 \cdot 1 = 1.$$

四、多元函数的连续性

有了多元函数的极限概念，就可以定义多元函数连续的概念.

定义 8.4　设二元函数 $f(P) = f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $P_0 \in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续；如果 $f(x,y)$ 在 D 的每一点处都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数，记作

$$f(x,y) \in C(D).$$

仿此可以定义 n 元函数的连续性.

定义 8.5　设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

例如，函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

其定义域 $D=\mathbf{R}^2$，$O(0,0)$ 是 D 的聚点，由例 3 知 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在，所以点 $O(0,0)$ 是该函数的一个间断点.

又如函数

$$f(x,y)=\sin\frac{1}{x+y},$$

其定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y\neq 0\},$$

直线 $x+y=0$ 上的点都是 D 的聚点，而 $f(x,y)$ 在该直线上没有定义，所以 $f(x,y)$ 在直线上各点都不连续，即直线 $x+y=0$ 上各点都是该函数的间断点.

前面我们已经指出：一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用. 利用多元函数的极限运算法则可以证明，多元连续函数的和、差、积、商（在分母不为零处）仍是连续函数，多元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元初等函数相类似，多元初等函数是指可用一个式子表示的多元函数，这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算得到的. 例如 $\cos xy^2$，$\ln(x^2+y)$，$\dfrac{x+y}{xy}$ 等都是多元初等函数.

与一元初等函数相类似，一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓**定义区域**是指包含在定义域内的区域或闭区域.

也正因为如此，我们在求多元初等函数 $f(P)$ 在点 P_0 的极限时，如果点 P_0 在函数的定义区域内，则极限值就是函数 $f(P)$ 在点 P_0 的函数值，即

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0).$$

例如，设 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy^2+1}+3}{x^2+y^3}$，则

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}f(x,y)=f(1,0)=4.$$

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质.

性质 1（有界性与最大值最小值定理）　在有界闭区域 D 上连续的多元函数必定在 D 上有界，且能取得它在 D 上的最大值和最小值.

性质 2（介值定理）　在有界闭区域 D 上连续的多元函数必取得介于它在 D 上的最大值和最小值之间的任何值.

习题 8-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界.

(1) $\{(x,y)\mid x\neq 0,y\neq 0\}$；　　(2) $\{(x,y)\mid x>y^2-1\}$；