

2005版·考研经典

N E T E M M A T H S

全国硕士研究生入学统一考试

数学一

模拟试卷8套

文登考研数学团队



■ 陈文灯	■ 黄先开
■ 曹显兵	■ 施明存
■ 殷先军	

- 依据新大纲
10年命题规律
- 答案详尽
- 附"知识点水平检测表"



有此防伪标志皆为正版

W 世界图书出版公司



2005版·考研经典

E T E M M A T H S

全国硕士研究生入学统一考试

数学一

模拟试卷8套

文登考研数学团队

陈文灯 黄先开 曹显兵
施明存 殷先军

● 《数学复习指南》

帮助考生理解和吃透大纲，掌握解题方法和技巧，奠定坚实的应试知识基础。

● 《数学题型集粹与练习题集》

将浩渺的习题浓缩于有限的题型之中，并配以练习题巩固所学知识点。

● 《重点题型》

帮助考生在中后期复习阶段梳理思路，对重点题型了然于胸。

● 《模拟试卷》

依据05年新大纲与十年命题规律编写，全面检测考生的水平。

 兴 典 图 书 出 版 公 司

北京·广州·上海·西安

 **FOCUS**
聚 焦 图 书

图书在版编目(CIP)数据

2005 版数学模拟试卷 8 套. 1/陈文灯等编著. —3 版. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2002

ISBN 7-5062-5453-0

I. 考... II. 陈... III. 数学—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 055393 号

数学一·模拟试卷 8 套

主 编: 陈文灯 黄先开 曹显兵 施明存 殷先军

责任编辑: 武海燕

封面设计: 滕晓娜

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 邮编: 100010 电话: 010-62198079)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 北京时代华都印刷有限公司

开 本: 787×1092 毫米 1/16

印 张: 9.5

字 数: 225 千字

版 次: 2004 年 8 月第 3 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5453-0/H·498

定价: 12.60

服务热线 010-62198078

前言

目前考研数学统考题的特点可以用两句话,十八个字来概括:信息量大,题量大;知识面宽,综合性强,难度大。这些命题的特点在近几年不会有大的变化。面对这种形势如何合理安排时间,发挥自己的潜能,高效地进行复习,是每个考研学子必须很好解决的问题。解决了,应试时就能考出自己的水平,或许能超常发挥,考出好成绩;解决不好就会“事倍功半”。为此,我建议同学们这样复习:

(1)牢记重要的概念、定理和公式。这样做可使你考试时节省“追忆”、“推演”的时间,同时可使你少犯错用定理、公式的错误。

(2)掌握一些题型的快速解法,提高解题速度。

(3)掌握重要的变量替换、辅助函数的作法技巧、重要题型的解题思路和方法。这可使你考试时很快找到解题的突破口,节省宝贵的考场时间。

《数学一·模拟试卷8套》就是基于上面的出发点并通过对历年考研真题的深入研究和我们多年的考研辅导经验精编了8套难度与真题相当或稍大、技巧性较强、基本概念较丰富的多种题型的模拟训练试卷。由于各种考研辅导书中选了大量的真题作为例题讲解,所以只有通过模拟试题的训练,才能更真实地检验自己的复习效果,真正起到查缺补漏的作用。

本书中每套试卷完全根据2005年全国硕士研究生入学统一考试样卷比例编写,对每套模拟试卷中的每道题给出了详尽的解析,包括解题切入点提示、答案详解、知识点的链接及对解题技巧的评注。

另外,对每套试卷,请读者严格掌握在3小时内独立做完,然后再看后面答案解析中的解题过程。通过与答案比照,看看自己在哪些方面还存在不足,及时突破提高。

由于一套试卷不足以检验考生的复习程度,我们在书的最后给出了一张知识点水平检测表格,包括所有试题所考查的知识点,请读者做完8套试卷后认真填写,检测自己的薄弱环节,及时调整,重点补习。

由于增添了新的思路、新的题型,难免有欠缺和不足或错误的地方,请考研学子和数学同仁批评指正。

编者
2004.8

目 录

模拟试卷(一)	(1)
◇ 分析·详解·评注	(49)
模拟试卷(二)	(7)
◇ 分析·详解·评注	(59)
模拟试卷(三)	(13)
◇ 分析·详解·评注	(71)
模拟试卷(四)	(19)
◇ 分析·详解·评注	(83)
模拟试卷(五)	(25)
◇ 分析·详解·评注	(93)
模拟试卷(六)	(31)
◇ 分析·详解·评注	(105)
模拟试卷(七)	(37)
◇ 分析·详解·评注	(120)
模拟试卷(八)	(43)
◇ 分析·详解·评注	(131)
知识点水平检测表	(143)

数学一 模拟试卷 (一)

考生注意: (1) 本试卷共 23 大题, 满分 150 分.

(2) 根据国家标准, 试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分, 把答案填在题中横线上)

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0, f'(0)=-2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln \cos(x-t) dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $z = xf(u) + g(u), u = \frac{y}{x}$, 且 $f(u)$ 及 $g(u)$ 二阶可导, 则 $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 积分 $\int_{-2}^2 (x+1) \sqrt{4|x|-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $y_1 = e^x - e^{-x} \sin 2x, y_2 = e^{-x} \cos 2x + e^x$ 是某二阶常系数非齐次线性方程的两个解, 则该方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & a \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (a 为某常数), B 为 4×3 的非零矩阵, 且 $BA = O$, 则矩阵 B 的

秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设 A, B 是两个随机事件, $P(A) = 0.4, P(AB) = 0.2, P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 则 $P(A+B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

得分	评卷人

二、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 过点 $P(1, 0, 1)$ 且与两条直线 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{0}$ 和 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1}$ 都相

交的直线的方向向量可取为

(A) $(-1, 1, 2)$ (B) $(-1, 1, -2)$ (C) $(1, 1, -2)$ (D) $(1, 1, 2)$ 【 】

(8) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$, 则当 $x > 1$ 时,

$f(x)$

(A) 单调减少且大于零.

(B) 单调增加且大于零.

(C) 单调减少且小于零.

(D) 单调增加且小于零. 【 】

(9) 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^p} + \frac{1}{n^{3-p}} \right]$, 下列结论正确的是

- (A) 当 $p > 0$ 时, 级数收敛. (B) 当 $p > 1$ 时, 级数收敛.
(C) 当 $0 < p < 2$ 时, 级数绝对收敛. (D) 当 $1 < p < 2$ 时, 级数绝对收敛.

【 】

(10) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$ 可写成

(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy.$

【 】

(11) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分条件是

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中没有零向量.
(B) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的个数 $s \leq n$.
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.
(D) 某向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示法唯一.

【 】

(12) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 则

- (A) A 与 B 均不可逆是 AB 不可逆的充要条件.
(B) $r(A) < n$ 与 $r(B) < n$ 是 $r(AB) < n$ 的充要条件.
(C) $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解的充要条件是 A 与 B 为等价矩阵.
(D) A 与 B 相似的充要条件是 $E - A$ 与 $E - B$ 相似.

【 】

(13) 对任意事件 A, B 下列结论正确的是

- (A) $P(A \cup B)P(AB) \leq P(A)P(B).$
(B) $P(A \cup B)P(AB) \geq P(A)P(B).$
(C) $P(A \cup B)P(AB) \geq P(A) + P(B).$
(D) $P(A \cup B)P(AB) \geq P(A \cup B).$

【 】

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, -1; -1, 4; 0)$, 则下列结论中不正确的是

- (A) X 与 Y 相互独立.
(B) $aX + bY$ 服从正态分布.
(C) $P\{X - Y < 1\} = \frac{1}{2}.$
(D) $P\{X + Y < 1\} = \frac{1}{2}.$

【 】

三、解答题(本题共9小题,满分94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(15) (本题满分12分)

设 $f''(1)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$, 记 $\varphi(x) = \int_0^1 f'[1 + (x-1)t] dt$, 求 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 某个邻域内的导数, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

得分	评卷人

(16) (本题满分12分)

设曲面 Σ 是锥面 $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 与两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 所围立体表面的外侧, 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^3 dydz + (y^3 + f(yz)) dzdx + (z^3 + f(yz)) dxdy$$

其中 $f(u)$ 是连续可微的奇函数.

得分	评卷人

(17) (本题满分 12 分)

已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 而 $F(x)$ 是微分方程 $xy' + y = e^x$ 满足初始条件 $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1$ 的解, 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的和.

得分	评卷人

(18) (本题满分 12 分)

在密度为 1 的半球体 $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的底面接上一个相同材料的柱体 $-h \leq z \leq 0, x^2 + y^2 \leq R^2 (h > 0)$, 为使整个立体 Ω 的重心恰好落在球心上.

问 h 为多少? 并求该立体关于 z 轴的转动惯量.

得分	评卷人

(19) (本题满分 10 分)

若 $a \leq f(x) \leq b, x \in [a, b]$ 且, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, 其中 k 为常数, $0 < k < 1$,
 设 $x_n \in [a, b], x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$.
 证明: (1) 存在唯一的 $x \in [a, b]$, 使 $x = f(x)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

得分	评卷人

(20) (本题满分 8 分)

设 A 是实矩阵. 证明: (1) $A^T A x = 0$ 与 $A x = 0$ 是同解方程组; (2) $\text{秩}(A^T A) = \text{秩}(A)$.

得分	评卷人

(21) (本题满分 10 分)

设 $B = A A^T$, 其中 $A^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 且 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为非零实数, A^T 为 A 的转置矩阵.

- (1) 证明 $B^k = lB$, 并求数 l (k 为正整数);
- (2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1} B P$ 为对角阵, 并写出该对角阵.

得分	评卷人

(22) (本题满分 9 分)

设 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 令 $Z = X + 2Y$.

- (1) 求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$ 及密度函数 $f_Z(z)$;
- (2) 求 $E(Z), DZ$.

得分	评卷人

(23) (本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} axe^{-\frac{x^2}{\lambda}}, & x > 0, (\lambda > 0) \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$

且 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为简单随机样本.

- (1) 确定常数 a ;
- (2) 求 λ 的极大似然估计量;
- (3) (2) 中求出的估计量是否为 λ 的无偏估计量?

数学一 模拟试卷 (二)

考生注意: (1) 本试卷共 23 大题, 满分 150 分.

(2) 根据国家标准, 试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$ 、 $\cot x$ 、 $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分, 把答案填在题中横线上)

(1) 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线方程为 _____, 法平面方程为 _____.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2ae^x, & x < 0 \\ 9\arctan x + 2b(x-1)^3, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设质点在力 $\vec{F} = \frac{-y-x^2}{x^2+y^2+2|xy|}\vec{i} + \frac{x+y^2}{x^2+y^2+2|xy|}\vec{j}$ 作用下沿封闭曲线 $|x|+|y|=1$

逆时针方向运动一周, 则 $\vec{F}$ 所作的功 $W = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x} = 1$ 的特解为 _____.

(5) 设 A, B 为三阶相似矩阵, 且 $|2E + A| = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ 为 B 的两个特征值, 则行列式 $|A + 2AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 已知随机事件 A, B, C 满足 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.5, P(C) = 0.5$, 且 A, B 独立, A, C 互不相容, 则概率 $P(A - C | AB \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}$.

得分	评卷人

二、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 设 $f(x) = \int_0^x \arctan(t-x)^2 dt, g(x) = \int_0^{\sin x} (3t^2 + t^3 \cos t) dt$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 高阶无穷小.

(B) 低阶无穷小.

(C) 等价无穷小.

(D) 同阶而非等价无穷小. 【 】

(8) 设 $f(x), g(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(x)$ 具有连续一阶导数, 满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0, f'(x) = -2x^2 + \int_0^x g(x-t) dt, \text{ 则}$$

(A) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(0, f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点. 【 】

(9) 设有无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 则

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 至少有一收敛.

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 至少有一发散.

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 【 】

(10) 下列结论正确的是

(A) 若 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处可导, 而 $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处不可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

(B) 若 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处不可导, 而 $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

(C) 若 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处可导, 而 $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定可导.

(D) 若 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处不可导, 而 $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处不可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导. 【 】

(11) 设 A, B 为两个 n 阶方阵, 现有四个命题:

① 若 A, B 为等价矩阵, 则 A, B 的行向量组等价;

② 若 A, B 的行列式相等, 即 $|A| = |B|$, 则 A, B 为等价矩阵;

③ 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 均只有零解, 则 A, B 为等价矩阵;

④ 若 A, B 为相似矩阵, 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 解空间的维数相同.

以上命题中正确的是

(A) ①, ③. (B) ②, ④. (C) ②, ③. (D) ③, ④. 【 】

(12) 设 A 为 4×5 矩阵, $r(A) = 4$, B 为 4×2 矩阵, 则下列命题中不正确的是

(A) $\begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} x = 0$ 只有零解.

(B) $(A : B)x = 0$ 必有无穷多解.

(C) $\forall b, \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} x = b$ 有唯一解.

(D) $\forall b, (A : B)x = b$ 必有无穷多解.

【 】

(13) 设 A, B, C 是三个随机事件, $P(ABC) = 0$, 且 $0 < P(C) < 1$, 则一定有

(A) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

(B) $P((A+B) \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C)$.

(C) $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

(D) $P((A+B)\bar{C}) = P(A \mid \bar{C}) + P(B \mid \bar{C})$ 【 】

(14) 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 服从正态分布 $N(0, \sigma_1^2)$, Y 服从正态分布 $N(0, \sigma_2^2)$, 则

概率 $P(|X - Y| < 1)$

- (A) 随 σ_1 与 σ_2 的增加而增加.
 (B) 随 σ_1 与 σ_2 的减少而减少.
 (C) 随 σ_1 的增加而增加, 随 σ_2 的减少而减少.
 (D) 随 σ_1 的增加而减少, 随 σ_2 的减少而增加.

【 】

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

得分	评卷人

(15) (本题满分 12 分)

设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \sin \frac{x}{t} \cdot [g(2x + \frac{1}{t}) - g(2x)]$, $g(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$, 计算定积分 $\int_0^1 f(x) dx$.

得分	评卷人

(16) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且满足 $f(x) = \sin x + \int_0^x t f(x-t) dt$.

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散.

得分	评卷人

(17) (本题满分 12 分)

计算 $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + 4z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是球面 $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0, a \neq 1)$,

取外侧.

得分	评卷人

(18) (本题满分 12 分)

设半径为 R 的球的球心在以原点为中心, 以 $a (a > R > 0, a$ 为常数) 为半径的定球面上.

试证: 当前者夹在定球面内部的表面积为最大时, R 等于 $\frac{4}{3}a$.

得分	评卷人

(19) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 开区间 (a, b) 内可导, $0 \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$.

证明: 在区间 (a, b) 内至少存在 ξ_1, ξ_2 , 使

$$f'(\xi_2) \tan \frac{a+b}{2} = f'(\xi_1) \frac{\sin \xi_2}{\cos \xi_1}.$$

得分	评卷人

(20) (本题满分 8 分)

设 A, B 为两个 n 阶矩阵, 已知: (1) A 有 n 个互异的特征值. (2) A 的特征向量也是 B 的特征向量.

求证: $AB = BA$.

得分	评卷人

(21) (本题满分 10 分)

设三阶对称矩阵 A 的特征值为 $0, 1, 1$, α_1, α_2 是 A 的两个不同的特征向量, 且 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2$.

(1) 证明: $\alpha_1^T \alpha_2 = 0$.

(2) 求方程组 $Ax = \alpha_2$ 的通解.

得分	评卷人

(22) (本题满分 9 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立且都服从参数为 p 的 0—1 分布, 已知矩阵 $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}$ 为正

定矩阵的概率为 $\frac{1}{8}$. 求: (1) 参数 p 的值; (2) 随机变量 $Y = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{vmatrix}$ 的分布律.

得分	评卷人

(23) (本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta(\theta + 1)x^{\theta-1}(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是从总体中抽取的容量为 n 的简单随机样本, 试求

(1) θ 的矩估计量;

(2) $g(\theta) = \frac{n\theta}{\theta + 2}$ 的矩估计量, 并证明它具有无偏性.