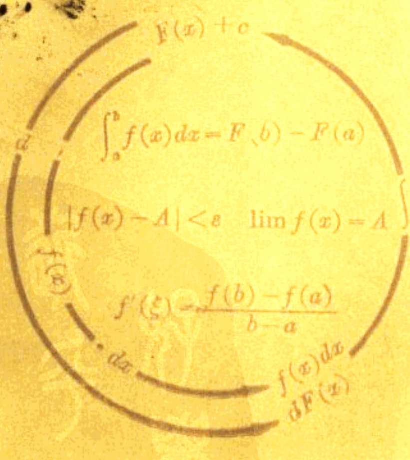
中专工科通用教材教学参考书

数学习题解集

第三册

株洲铁路电机学校数学教研组解



航空工业出版社

中专工科通用教材教学参考书

数学习题解集

第三册

株洲铁路电机学校数学教研组　解

航空工业出版社

1988

内 容 提 要

本套《习题解集》是工科中专数学教材编写组编、上海市中专数学教材编写组修订的中等专业学校教材工科专业通用《数学》第一、二、三、四册（高等教育出版社出版，1986年3月第2版）的习题的全解。它共有3132题，包含了代数、三角、立几、解几、微积分、微分方程、级数、行列式、矩阵与线性方程组、拉氏变换、概率、数理统计方面的习题和各类中专数学教材中的基本习题。它既适合招收初、高中毕业生的工科中专师生参考，也适合招收初、高中毕业生的其它各类中专、职工中专、函授中专的师生、自学中专数学者参考。

中专工科通用教材教学参考书

数学习题解集

第三册

株洲铁路电机学校数学教研组　解

航空工业出版社出版发行
（北京市和平里小关东里14号）
全国各地新华书店经销
湖南师范大学印刷厂印刷

1988年12月第1版　1988年12月第1次印刷
787×1092毫米 1/32　印张：15.125
印数：1—10000　字数：353千字
ISBN 7-80046-107-6/G·010
定价：3.90元

目　　录

习 题 14 1

1. 下列各题中所给的两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=x$和$y=\sqrt{x^2}$； (2) $y=x$和$y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $y=2-x$和 $y=\dfrac{4-x^2}{2+x}$；

(4) $y=\arccos x$和$y=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$；

(5) $y=\ln\sqrt{x-1}$和$y=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$；

(6) $y=|x-1|$和$y=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

解

(1) 函数$y=x$和$y=\sqrt{x^2}$ 是不相同的。因为它们的对应关系不相同。函数$y=x$的对应关系是$y=x$，函数$y=\sqrt{x^2}$的对应关系是$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$

(2) 函数$y=x$和$y=(\sqrt{x})^2$是不相同的。因为它们的对应关系和定义域都不相同。函数$y=x$的对应关系是$y=x$，即y是直接对应于x。它的定义域是$(-\infty, +\infty)$。函数$y=(\sqrt{x})^2$的对应关系是$y=(\sqrt{x})^2$，即y是对应于x的平方根的平方。它的定义域是$[0, +\infty)$；

(3) 函数$y=2-x$和$y\dfrac{4-x^2}{2+x}$是不相同的。因为它们的对应关系和定义域都不相同。函数$y=2-x$的对应关系是

$y=2-x$，即 y 对应于2减 x．它的定义域是$(-\infty, +\infty)$．函数$y=\dfrac{4-x^2}{2+x}$的对应关系是$y=\dfrac{4-x^2}{2+x}$，即 y 对应于4减x^2的差除以2加x的和．它的定义域是$(-\infty, -2)\cup(-2, +\infty)$；

(4) 函数 $y=\arccos x$和$y=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$是相同的．因为它们的对应关系和定义域都是相同的．它们的定义域都就$[-1, 1]$，对应关系都是对定义域内的每一个 x 的值对应于同一个函数值，即对于定义域内的每一个 x 的值，对应的函数值都是相同的；

(5) 函数 $y=\ln\sqrt{x-1}$和 $y=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$是相同的．因为它们的对应关系和定义域都是相同的．它们的对应关系实质上都是 $y=\ln\sqrt{x-1}$或 $y=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$，定义域都是$(1, +\infty)$；

(6) 函数$y=|x-1|$和 $y=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-1, & x>1,\end{cases}$ 是相同的．

因为它们的对应关系和定义域都是相同的．函数 $y=|x-1|$的对应关系是 $y=|x-1|=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-1, & x>1,\end{cases}$ 函数

$y=\begin{cases}1-x, & x<1\\ 0, & x=1\\ x-1, & x>1\end{cases}$ 的对应关系是 $y=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-1, & x>1,\end{cases}$

或函数 $y=|x-1|$的对应关系是$y=|x-1|$，函数

$$y=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-1, & x>1,\end{cases}$$ 的对应关系是 $$y=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-1, & x>1,\end{cases}$$

$=|x-1|$，即它们的对应关系实质上都是

$$y=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-1, & x>1,\end{cases}$$ 或 $y=|x-1|$。它们的定义域都

是$(-\infty,\ +\infty)$。

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+4}$； (2) $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\sqrt{1-|x|}$； (4) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(5) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$；

(6) $y=\arccos\sqrt{2x}$ ； (7) $y=\dfrac{x}{\mathrm{tg}x}$。

解

(1) ∵ 只要$3x+4\geqslant0$,即 $x\geqslant-\dfrac{4}{3}$，函数 $y=\sqrt{3x+4}$ 就有意义。

∴ 函数 $y=\sqrt{3x+4}$ 的定义域是$\left[-\dfrac{4}{3},\ +\infty\right)$；

(2) ∵ 只要 $x^2-3x+2\neq0$，即 $x\neq1$，$x\neq2$，函数 $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$ 就有意义，

∴ 函数 $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$ 的定义域是$(-\infty,\ 1)\cup(1,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$；

(3) ∵ 只要$1-|x|\geqslant 0$，即$|x|\leqslant 1$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，函数$y=\sqrt{1-|x|}$就有意义，

∴ 函数$y=\sqrt{1-|x|}$的定义域是$[-1, 1]$；

(4) ∵ 只要

$$\begin{cases}1-x\neq 0,\\ \dfrac{1+x}{1-x}>0\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x\neq 1,\\ -1<x<1,\end{cases} \quad -1<x<1,$$

函数$y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$就有意义，

∴ 函数$y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$的定义域是$(-1, 1)$；

(5) ∵ 只要$\begin{cases}2+x\geqslant 0\\ 1+x>0\\ 1+x\neq 1,\end{cases}$ 即$x>-1$且$x\neq 0$，函数

$y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$就有意义，

∴ 函数$y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$的定义域是$(-1, 0)\cup(0, +\infty)$；

(6) ∵ 只要$0\leqslant 2x\leqslant 1$，即$0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$，函数

$y=\arccos\sqrt{2x}$ 就有意义，

∴ 函数$y=\arccos\sqrt{2x}$的定义域是$\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$，

(7) ∵ 只要$\begin{cases}x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)\\ \operatorname{tg}x\neq 0,\end{cases}$ 即$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$

且$x \neq k\pi(k\in Z)$，函数$y=\frac{x}{\mathrm{tg}x}$就有意义，

$\therefore$ 函数$y=\frac{x}{\mathrm{tg}x}$的定义域是$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$、$x\neq k\pi(k\in Z)$的一切实数，即$\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right)(k\in Z)$。

3．设$f(x)=\arcsin x$，求$f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f(1)$。

解

$$f(0)=\arcsin 0=0,$$

$$f(-1)=\arcsin(-1)=-\arcsin 1=-\frac{\pi}{2},$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3},$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4},$$

$$f(1)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

4．设$G(x)=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{2}$，求$G(0)$，$G(1)$，$G(\sqrt{2})$，$G(-\sqrt{3})$，$G(-2)$。

解

$$G(0)=\frac{1}{2}\arccos\frac{0}{2}=\frac{1}{2}\arccos 0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

$$G(1)=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6},$$

$$G(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8},$$

$$G(-\sqrt{3})=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{12},$$

$$G(-2)=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{-2}{2}\right)=\frac{1}{2}\arccos(-1)$$

$$=\frac{1}{2}(\pi-\arccos 1)=\frac{1}{2}(\pi-0)=\frac{1}{2}\pi.$$

5. 设$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ 2(1-x), & \frac{1}{2}\leqslant x<1,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 作出它的图象，并求

$f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{3}\right), f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f(2)$的值.

解

用描点法作函数$f(x)$的图象于图1.

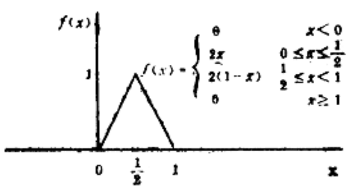


图1

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $\qquad f\left(\frac{1}{3}\right)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,

$f\left(\frac{3}{4}\right)=2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,

$f(2)=0$.

6. 求下列函数的反函数，并写出反函数的定义域：

(1) $y=x^2-2x(x>1)$；　(2) $y=10^{x+1}$；

(3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　(4) $y=\sin x\left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi\right)$；

(5) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$.

解

(1) ∵ 由$y=x^2-2x(x>1)$得

$$y+1=(x-1)^2,\qquad x-1=\sqrt{y+1},$$

$$x=\sqrt{y+1}+1.$$

∴ 函数$y=x^2-2x(x>1)$的反函数是$y=\sqrt{x+1}+1$，反函数的定义是$(-1,+\infty)$；

(2) ∵ 由$y=10^{x+1}$得

$$x+1=\lg y,\qquad x=\lg y-1.$$

∴ 函数$y=10^{x+1}$的反函数是$y=\lg x-1$，反函数的定义域$(0,+\infty)$；

(3) ∵ 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$得

$$y+xy=1-x,$$

$$x(y+1)=1-y,$$

$$x=\frac{1-y}{1+y}.$$

∴ $y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数是$y=\dfrac{1-x}{1+x}$，反函数的定义域是$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$；

(4) ∵ 由 $y=\sin x\left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi\right)$得

$$x=\pi-\arcsin y.$$

$\therefore$ 函数 $y=\sin x\left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi\right)$的反函数是 $y=\pi-\arcsin x$，反函数的定义域是$[-1, 1]$；

(5) $\because$ 由$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$得

$$x+\sqrt{x^2+1}=a^y,$$

$$x+\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=a^y-a^{-y},$$

$$\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=a^y-a^{-y},$$

$$\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=a^y-a^{-y},$$

$$\frac{2x(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}=a^y-a^{-y},$$

$$x=\frac{a^y-a^{-y}}{2}.$$

$\therefore$ 函数$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$的反函数是 $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$，反函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$.

7. 指出下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇偶函数？

(1) $f(x)=x^4-2x^2+3$； (2) $\varphi(x)=x^2\cos x$；

(3) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$； (4) $y(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

(5) $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$； (6) $g(x)=\frac{x}{a^x-1}$.

解

(1) $\because$ 对于函数 $f(x)=x^4-2x^2+3$ 定义域内的任意 x，有

$$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+3=x^4-2x^2+3=f(x),$$

$\therefore$ 函数$f(x)=x^4-2x^2+3$ 是偶函数；

(2) $\because$ 对于函数$\varphi(x)=x^2\cos x$定义域内的任意x，有

$$\varphi(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=\varphi(x),$$

$\therefore$ 函数$\varphi(x)=x^2\cos x$是偶函数；

(3) $\because$ 对于函数$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$定义域内的任意$x$，有

$$f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{-(-x)})=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^x)=f(x),$$

$\therefore$ 函数$f(x)=\frac{1}{2}e^x+e^{-x})$是偶函数；

(4) $\because$ 对于函数$y(x)=(e^x-e^{-x})$定义域内的任意x，有

$$y(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{-(-x)})=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$$

$$=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-f(x),$$

$\therefore$ 函数$y(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$是奇函数；

(5) $\because$ 对于函数$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$定义内的任意 x，有

$$f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}$$

$$=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

$\therefore$ 函数$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$是奇函数；

(6) $\because$ 对于函数 $g(x)=\frac{x}{a^x-1}$ 定义域内的任意 x，

$$g(-x)=\frac{-x}{a^{-x}-1}=\frac{-x}{\frac{1}{a^x}-1}=\frac{-xa^x}{1-a^x}=\frac{xa^x}{a^x-1}，即$$

$$g(-x)\neq g(x)，g(-x)\neq -g(x)。$$

$\therefore$ 函数 $g(x)=\frac{x}{a^x-1}$ 是非偶非奇函数。

8. 证明函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-1, 0)$ 内单调减少。

证明

在 $(-1, 0)$ 内任取两点 x_1、x_2，且设 $x_2>x_1$，则知 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2>0$

$\because$ $y_2-y_1=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_2x_1}<0$，

$\therefore$ $y_2<y_1$。

由函数单调减少的定义可知，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(-1, 0)$ 内是单调减少的。

9. 证明函数 $y=\lg x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调增加。

证明

在 $(0, +\infty)$ 内任取两点 x_1、x_2，且设 $x_2>x_1$，则知 $\frac{x_2}{x_1}>1$。

$\because$ $y_2-y_1=\lg x_2-\lg x_1=\lg\frac{x_2}{x_1}>0$，

$\therefore$ $y_2>y_1$。

由函数单调增加的定义可知，函数 $y=\lg$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的。

10. 下列各函数中哪些函数在区间$(-\infty, +\infty)$内是有界的？

(1) $y=\sin^2 x$；　　(2) $y=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$；

(3) $y=\sin\left(\sin\frac{x}{2}\right)$；　　(4) $y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}$.

解

(1) ∵ 对于一切$x\in(-\infty, +\infty)$，都有

$0\leqslant\sin^2 x\leqslant 1$，即 $0\leqslant|\sin^2 x|\leqslant 1$.

∴ 函数$y=\sin^2 x$在$(-\infty, +\infty)$是有界的；

(2) ∵
$$y=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),$$

故，对于一切$x\in(-\infty, +\infty)$，都有
$$\left|\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right|=\left|\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}.$$

∴ 函数$y=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$在$(-\infty, +\infty)$内有界；

(3) ∵ 对于一切 $x\in(-\infty, +\infty)$，都有$\left|\sin\frac{x}{2}\right|\leqslant 1$.

又，对于一切$\left(\sin\frac{x}{2}\right)\in[-1, 1]$，都有
$$\left|\sin\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right|\leqslant\sin 1\approx\sin 57.3^\circ\approx 0.84151,$$

∴ 函数$y=\sin\left(\sin\frac{x}{2}\right)$在$(-\infty, +\infty)$内有界；