中学数学课本辅导丛书

初中代数第三册学习指导

张晖　曹敏　编

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

辽宁教育出版社

中学数学课本辅导丛书

初中代数第三册学习指导

张 晖 曹 敏 编

辽宁教育出版社

1985·沈 阳

初中代数第三册学习指导

张晖　曹敏　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳市第二印刷厂印刷

字数：175,000　开本：787×1092 1/32　印张：8¾

印数：1—60,300

1985年5月第1版　1985年5月第1次印刷

责任编辑：王越男　封面设计：庞咏红

统一书号：7371·7　定价：0.98元

出 版 说 明

提高学生的自学能力，是时代对人才培养的要求。中学生在求知阶段，主要是从课本中汲取知识营养。长期以来，广大中学生迫切要求出版一套能够帮助他们学好课本的辅导读物，作为良师益友。为了满足这个要求，我们组织了一些执教多年、经验丰富的中学数学教师和专门从事数学研究的人员，编写了这套《中学数学课本辅导丛书》。

在组织和编写过程中，辽宁教育学院邢清泉、关成志同志担任了本书的主编，并同钱永耀同志一起审阅了全部书稿。

这套辅导丛书紧扣中学数学教学大纲，按照现行数学课本的知识顺序，进行逐章逐节逐个问题地剖析解疑，力求起到提醒注意、开阔思路、指导解题、介绍学习方法的作用。每个单元都配有巩固基本知识的“思考与练习”，每章后面配有少量典型的综合练习题，帮助学生更好地理解和消化课本内容，提高自学能力。

目　　录

第九章　数的开方

开方运算是六种基本运算之一。数的开方一章涉及的概念较多，内容比较分散，把握住它们之间的内在联系是十分必要的。

本章的知识结构是：

- 数的开方
  - 平方根，开平方，算术平方根，平方根表
  - 立方根，开立方，立方根表
  - n次方根，开n次方，n次算术根
- 实数初步，无理数，实数及其简单性质

（一）内容简介

在这一章里，将学习数的开方的概念和求法，主要是平方根、立方根的概念和求法以及实数的概念和运算等有关知识。

同学们已经知道，在我们学过的有理数的加、减、乘、除、乘方的五种基本运算中，加法与减法，乘法与除法都是互逆的运算。那么，乘方运算有无逆运算？若有，它是什么，怎样进行？这就是我们现在要学习的内容。

课本从已知的幂的概念入手，用实例引出了平方根和立方根的概念，分别介绍了它们的性质。在此基础上又介绍了算术根这一重要概念，给出了一个数的平方根和立方根的求法。这样，不仅使常用的开平方、开立方的运算得以实现，而且进一步完善了加与减、乘与除、乘方与开方这三对互逆

的六种代数运算的整体认识。由于开方运算会遇到开不尽的情况，产生了如同$\sqrt{2}=1.41421356\cdots\cdots$这样的无限不循环小数，对数的认识就需要进一步发展。于是，数的概念从有理数扩充到实数也就成为必然了。实数概念的建立、实数运算的研究又为在实数范围内解方程，首先是一元二次方程打下了基础，也为根式的运算做了知识和方法上的准备。所以，数的开方这章内容既是代数运算的继续和深入，又是进一步研究代数式和方程理论的前提和桥梁。

（二） 学习指导

本章的内容都是建立在有关概念基础上的，学习中务求弄懂每一个概念。首先要注意概念的建立过程。这个概念是怎样引入的，本质特征是怎样抽象出来的，它又是怎样地反映在定义中？有无相应的表达式或规定的数学符号，其结构和意义如何？其次，要注意概念的应用。概念都是通过它的定义来表现的，而定义都有两个作用：一是判断所研究的对象是否属于这个概念的范畴；二是说明这个概念所包括的对象都具有某种既定的属性特征。应用概念要注意准确、合理，特别是在变化的条件下，在具体问题中，都能正确辨析，恰当使用。再其次是注意运用科学的思维方法。比如对课本中一些类似的概念：平方根、立方根、n次方根以及开平方、开立方、开n次方等都可以用“类比”的方法由此及彼的学习研究；对某些相近易混的概念：平方根、算术平方根等又可以用“对比”的方法辨别异同，加深理解。

平方根表和立方根表的查法似乎机械、枯燥些，但因其

有一定的实用价值，亦不可忽视。要注意掌握方法要领，做到准确、熟练。

9.1 平 方 根

学习这节内容要理解和掌握平方根的定义、性质和表示方法；理解开平方运算的意义，掌握用平方运算求一个完全平方数的平方根的方法。

1. 平方根的概念

课本对平方根概念的介绍分三个方面：

1）定义．怎样确定面积等于9平方尺的方桌的边长？这个问题归结为数学问题就是要求出平方等于9的那个数是什么。类似地，还有诸如$(\quad)^2=\frac{4}{9}$，$(\quad)^2=0.81$，……等一系列问题．为了解决已知某数的平方求某数的问题，我们定义：如果一个数的平方等于a，这个数就叫做a的平方根（也叫二次方根）．也就是说，如果$x^2=a$，那么x叫做a的平方根．例如：$\because \left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$\therefore \frac{2}{3}$和$-\frac{2}{3}$都是$\frac{4}{9}$的平方根。

注意 对于$x^2=a$来说，a是x的平方数（二次幂），x是a的平方根（二次方根），x与a的意义不要弄混。

2）性质．一个数a的平方根是否存在，有何特点，完全取决于a的意义。

（1）正数a的平方根有两个，并且这两个平方根是互

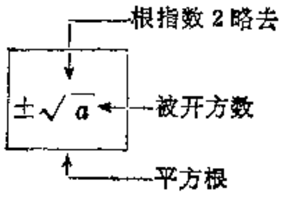
为相反数．这里，“两个”是数量，“互为相反数”是特征，合起来就说明了正数 a 的平方根的性质．例如9是正数，所以9的平方根有两个，它们是互为相反的两个数3和－3．根据什么？由定义，∵ $(\pm 3)^2=9$，∴ ±3是9的平方根．

（2）零的平方根是零．因为满足 $x^2=0$ 的数只有一个，即 $x=0$．

（3）负数没有平方根．道理很明显，根据定义，$x^2=a\geqslant 0$，就是说任何正数，负数和零的平方都大于或等于零，平方为负数的数不存在（实数范围内），所以，负数没有平方根．

上述三条是平方根的性质．

3）记号．数学中的记号或符号是赋于了特定意义的语言．课本中给出了平方根的表示方法，指出：正数 a 的正的平方根记为 $\sqrt{a}$，负的平方根记为 $-\sqrt{a}$，合起来记为 $\pm\sqrt{a}$；零的平方根是零，$\pm\sqrt{0}$ 就是0．对于 $\pm\sqrt{a}$ 要明确它的整体意义和各组成部分的名称．



注意

（1）因为负数没有平方根，所以 $\pm\sqrt{a}$ 中的 a 要大于

或等于零，即$a\geqslant0$。这也就是说$\pm\sqrt{a}$是正数或零的平方根的一般表达式，它有意义的前提条件是$a\geqslant0$。

（2）记号"$\sqrt{\ }$"有双重意义。它既是正的平方根的性质符号，又是我们下面要讲到的开平方运算的运算符号。例如$\sqrt{36}$不仅表示36的正的平方根，也表示对36进行开平方运算，所以$\sqrt{36}=6$，而$\sqrt{36}=\pm6$或$\sqrt{36}=-6$是错误的.

2. 开平方运算

开平方是指求一个数a的平方根的运算。即如果$x^2=a$，由此求x的运算就是开平方运算。显然，这是由幂（二次幂）求根（平方根）的运算。它与平方运算是互逆的。比如：已知$x^2=121$，求x，这是开平方运算，$x=\pm\sqrt{121}=\pm11$；已知$x=11$，求x^2，这是平方运算，$x^2=11^2=121$。掌握这种互逆的运算关系是有意义的。我们不仅可以借助已知的平方运算求出一个数的平方根，而且还可以利用平方运算来检验所求的平方根是否正确。例如求0.25的平方根可以这样进行：

$$\because\quad(\pm0.5)^2=0.25,$$

$$\therefore\quad 0.25\text{的平方根是}\pm0.5。$$

$$\text{即}\pm\sqrt{0.25}=\pm0.5。$$

上面这种书写方式反映了用平方运算求一个数的平方根的方法。通过这种练习可以使我们加深理解平方根的概念和表示方法。

本节中的例题都是围绕平方根的概念设计的。例1是求一些正数的平方根。求正数的平方根，实质上就是要求出互

为相反的两个数，使它们的平方等于所给的正数．方法是我们上面说过的利用平方运算求一个数平方根的方法．解题时分为三步：首先从平方运算入手，接着用平方根的定义确定所求的平方根，最后，用平方根的记号表示．书写时，这三步分别用“∵，∴”和“即”连接．开始学习时，应严格按此三步解题，待熟练以后可只写出第三步．例如求$\frac{16}{25}$的平方根，可直接写成$\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$．

例2是判断64、-64、0、$(-4)^2$有无平方根，这是平方根性质的直接应用．解答时，注意到给出的数是正数，还是负数或者零，运用平方根的性质作出判断就可以了．

为加深理解平方根的概念，巩固所学的知识，同学们还可以练习如下题目：

1．$\sqrt{25}$能读成25的平方根吗？为什么？

2．如果$a>0$，$\sqrt{a}$和$x^2=a$中的x相等吗？若不等，你能说出它们的联系和区别吗？

3．当a是什么数时，$\pm\sqrt{a}$表示a的平方根？如果$\pm\sqrt{-a}$表示$-a$的平方根，a应是什么样的数？

4．填表：

a	121	169	196	256	324
a的平方根					
$\sqrt{a}$					

9.2 算术平方根

算术平方根是一个重要概念。学习这节，同学们要在理解算术平方根的概念上下功夫，搞清它与平方根的联系和区别。

学习中要注意解决下面三个问题：

1. 算术平方根的定义和表示方法

正数的平方根具有双值性，即一个正数的平方根是两个互为相反的数。其中那个正的平方根在实际应用中有着重要的作用，它可以使开方运算单值化，使运算的结果唯一确定，因此，有必要建立算术平方根的概念。课本中介绍说"正数a的正的平方根，也叫做a的算术平方根，记作$\sqrt{a}$"。对此，可以理解为算术平方根就是正数a的那个正的平方根的"别名"。很明显，这是为了区别正数a的正的平方根和a的平方根而做的一种规定，这里的a是正的，$\sqrt{a}$本身也是正的。例如25的正的平方根是5，那么5也叫25的算术平方根，并表示成$\sqrt{25}=5$。前一节中，我们曾经强调过"$\sqrt{\ }$"是正的平方根的性质符号，$\sqrt{a}$表示正数a的正的平方根。有了算术平方根的定义，$\sqrt{a}$也就成了正数a的算术平方根的特定符号。

值得注意的是，课本在给出算术平方根的定义之后，又用黑体字说明"零的算术平方根仍旧是零"，这个补充规定是算术平方根定义的一个重要组成部分，不可忽视。有了这一条，算术平方根的概念便可理解为非负数a的非负平方根。被开方数非负，算术平方根本身非负，这两个"非负"就是

算术平方根的实质所在。

明确了算术平方根的实质，它的记号表示的意义也就清楚了。

（1）当$a>0$时，$\sqrt{a}$表示a的算术平方根。$-\sqrt{a}$应理解为a的算术平方根的相反数。

（2）当$a=0$时，$\sqrt{a}=0$，$\sqrt{a}$表示零的算术平方根。

（3）当$a<0$时，$\sqrt{a}$无意义。就是说负数没有算术平方根。

2. 算术平方根的应用

课本第5页的例1、例2反映了算术平方根概念的应用。用算术平方根的定义可以求出一些非负数的算术平方根和平方根。

求正数a的算术平方根的方法与求平方根的方法类似，也是分三步进行．不过，要注意算术平方根的非负性质。

例如，求$\frac{49}{64}$的算术平方根：

解 $\because \left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$，

$$\therefore \frac{49}{64}\text{的算术平方根是}\frac{7}{8}\text{，即}\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8}.$$

一个正数的负的平方根是这个正数算术平方根的相反数，所以，求一个正数的平方根可以通过它的算术平方根求得。

例如，求$-\sqrt{2\frac{1}{144}}$的值。

解 $\because\ -\sqrt{2\frac{1}{144}}=-\sqrt{\frac{289}{144}}$，$\left(\frac{17}{12}\right)^2=\frac{289}{144}$，

$\therefore\ -\sqrt{2\frac{1}{144}}=-\frac{17}{12}$。

3. 算术平方根和平方根的异同

相同点：

（1）零的平方根和算术平方根都是零。

（2）平方根和算术平方根的被开方数均非负。

相异点：

（1）两者的性质不同。一个正数的平方根有两个，且互为相反数；一个正数的算术平方根是单值的，即这个正数的正的平方根。

（2）两者的记法不同。算术平方根用“$\sqrt{\ }$”表示，平方根则用“$\pm\sqrt{\ }$”表示。

请完成下面三个问题：

1. $\sqrt{a}$ 和 $x^2=a$ 中的 x 的意义是否相同，为什么？

2. 判断正误。

（1）$\sqrt{16}=\pm4$；　（2）$\sqrt{16}=4$；

（3）$\sqrt{(-3)^2}=-3$；　（4）$\pm\sqrt{\frac{36}{169}}=\frac{6}{13}$；

（5）$-\sqrt{(-5)^2}=5$；　（6）$\pm\sqrt{3^2+4^2}$

$=\pm(3+4)=\pm7$。

3. 解答下面各问，说明它们异同。

（1）某数的平方是25，求某数；

（2）方桌面的面积是25平方尺，求方桌面的边长。

9.3 平方根表

用平方运算的方法可以求得一些数的平方根或算术平方根，但这种方法依靠观察、验证，带有一定的局限性。实际应用中，往往需要知道任意一个正数的平方根，这就需要一种较为理想的方法。前人总结的平方根表就能解决这个问题。

学习本节内容，应该了解平方根表的构造和用途，掌握平方根表的查法。

1. 平方根表的构造

对于平方表，同学们已经熟悉了。与平方表的意义相反，平方根表的用途在于由已知的正数N求得$\sqrt{N}$或进而求得$-\sqrt{N}$。

平方根表的构造可以分为两部分。其一是已知数部分，即表中“N”所在的直列和横行；其二是所求数部分，即表中左半部分的四位数和右半部分的修正值。已知数部分用来查找被开方数，所求数部分用来确定所求的算术平方根。表中的四位数除一些完全平方数所对应的算术平方根是准确值外，一般地都是精确到0.001的近似值。

2. 平方根表的查法

被开方数的大小不同，查表的方法也不同。

1）当$1\leqslant N<100$时，$\sqrt{N}$的值可从表中直接查出，查表的关键是找准被开方数。具体方法可以概括为“直查、横找、取交叉”，即在N所在的直列中查到被开方数的前两位

数，在N所在的横行中找到被开方数的第三位数，前两位数所在的横行与第三位数所在的直列的交叉位置的四位数，就是所求的算术平方根．比如求$\sqrt{1.35}$，因为$1<1.35<100$，所以可直接查表求值．首先在N的直列中查到1.3，注意，是1.3，而不是13，然后再横找，在N的横行中找到1.35的第三位数5，行与列交叉处的1.162即为所求．就是说，$\sqrt{1.35}=1.162$．

查表时必须注意，不要误将平方表代替平方根表，“直查”要查准，“横找”要找对，谨防错误发生．

如果N是大于1、小于100的四位数，查表时应采用“直查、横找、加修正”的方法，就是说，对于被开方数的前三位数仍按“直查、横找、取交叉”的方法进行，得到的数再加上从修正值栏里查到的被开方数的第四位数所对应的修正值．应当注意，修正值栏里的数字如果对应的是2，那么加上去的数应是0.002，如果是13，那么加上去的数应是0.013．

2）当$N<1$或$N>100$时，$\sqrt{N}$的值不能从表中直接查到，此时，要通过小数点移动的方法转化为表中可查数，进而再确定所求的$\sqrt{N}$的值．这种方法，我们暂且叫它“移位转化”法．使用这种方法的关键是正确运用小数点的移位原则：“被开方数的小数点每移动两位，查得的平方根的小数点应该向相反的方向移动一位”。就是说，被开方数的小数点只要移动，就要遵循双位移动的原则，两位两位地移动，移动的目的是变被开方数为只含一位整数或两位整数的表中可