想想和算算

——初中代数的概念与技巧

5

少年儿童出版社

想想和算算

——初中代数的概念与技巧

（五）

周玉刚　陈肇曾 编著

少年儿童出版社

想 想 和 算 算

（五）

周玉刚　陈肇曾 编著

少年儿童出版社出版

（上海延安西路 1538 号）

新华书店上海发行所发行

上海市印刷十二厂排版　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 10.125　字数 207,000

1985 年 3 月第 1 版　1985 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—37,000

统一书号：R 7024·205　　定价：1.20元

内 容 提 要

本书试图通过对初中代数中的基本概念、解题技巧的总结与回顾，帮助读者深化平时所学的初中代数的基础知识，启迪智慧，锻炼和提高逻辑思维能力，扩大知识面，增强学习数学的兴趣。

全书共分六个单元，每个单元又分为若干小节，每个小节由基本要点与问题两个部分组成。在基本要点中，主要是把初中代数中的基本概念与基础知识作一提纲挈领的说明，着重揭示知识间的内在联系、解题规律。在问题中，选编时着重考虑了三个方面，一是有助于基本概念理解的题目，例如常见错误分析的改错题，诡辩题等；二是有助于沟通解题思路、掌握解题技能技巧的题目，例如围绕解题方法或规律组织的计算题、证明题等；三是有助于思维能力提高的兴趣题，例如智力训练题、情景测验题等。

目　录

一、从自然数到实数

1. 数的整除性

基本要点

1. 自然数

人们在数物体时，用来表示物体个数多少的1、2、3、4、5、……等，就是一些自然数。自然数又叫做正整数。

自然数虽然看起来很简单，但它有着极其丰富的内容。数学学科中的《整数论》即《数论》就是专门研究整数性质的一门数学分支。

2. 数的整除

设a、b是整数，a除以$b(b\neq 0)$，得整数商q，使$a=bq$成立，则称a能被b整除，记作$a|b$。a叫做b的倍数，b叫做a的约数(或因数)。

3. 数的整除性的判定法

(1) 能被2或5整除的数的特征：这个数的末位数能被2或5整除。

(2) 能被4或25整除的数的特征：这个数的末二位上的数字所组成的数能被4或25整除。

例如，7684能被4整除，因为84能被4整除；8275能被

25整除，因为 75 能被 25 整除。

(3) 能被 3 或 9 整除的数的特征：这个数的各个数位上的数字之和能被 3 或 9 整除。

例如，5832的各个数位上的数字之和为$5+8+3+2=18$，能被 3 或 9 整除，所以 5832 能被 3 或 9 整除。

(4) 能被 8 或 125 整除的数的特征：这个数的末三位上的数字所组成的数能被 8 或 125 整除。

例如，173864 的末三位上的数字所组成的数 864 能被 8 整除，所以它能被 8 整除；又如819625，因为 625 能被 125 整除，所以这个数能被 125 整除。

(5) 能被 11 整除的数的特征：这个数的奇数位上数字之和与偶数位上数字之和的差的绝对值能被 11 整除。

例如，9486323 的奇数位上数字之和等于 $9+8+3+3=23$，偶数位上数字之和为 $4+6+2=12$，这两个和的差的绝对值 $|23-12|=11$能被11整除，所以9486323能被 11 整除。

(6) 能被 7、11、13 整除的数的特征：这个数的末三位上的数字所组成的数与末三位以前的数字所组成的数之差的绝对值能被 7、11、13 整除。

例如，1005928，由于 $|928-1005|=77$ 能被 7 与11整除，所以 1005928 能被 7 或 11 整除；又如 927914，由于 $|914-927|=13$能被 13 整除，所以 927914 能被 13 整除。

4. 余数公式

如果 a 除以 b，商为 q，余数为 r，则 $a=bq+r$，这个式子叫做余数公式。

余数的作用：根据除数 b 并利用余数 r 的大小，可以把

全体自然数进行分类。就是说，把全体自然数分为余数 $r=0$、1、2、…、$b-1$这样 b 类：即能被 b 整除的全体自然数作为"0"类；被 b 除后得余数 $r=1$的全体自然数作为"1"类；……；被 b 除后得余数 $r=b-1$ 的全体自然数作为（$b-1$）类，等。

例如，取除数 $b=2$，则"0"类的全体自然数就是偶数；"1"类的全体自然数就是奇数。

这种利用余数把自然数分类的思想，在解题时往往有广泛的应用。

问　　题

1. 想一想：整除与"除得尽"有什么区别？根据$12\div1.2=10$能否说12能被 1.2 整除，根据$11\div2=5.5$能否说 11 能被 2 整除。

2. 看谁算得快，下面各数哪些是2、3、4、5、7、8、9、11、13、125 的倍数。

   (1)　43290；(2)　85437；(2)258852；(4)77000。

3. 任意取一个两位数，交换它的数字的次序，又得到一个两位数。求证这个两位数之差一定能被 9 整除。

4. 在任意一个三位数后面接上一个同样的三位数，得到一个六位数(例如，158后面接上158，得到六位数158158)，求证这个六位数必定能同时被 7、11、13 三个数整除。

5. 对任何整数n，$\frac{1}{5}n^5-\frac{2}{3}n^3-\frac{8}{15}n$的值是一个整数，想一想，这是为什么？

*6. 试证：$N=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}\times\underbrace{100\cdots0}_{(n-1)\text{个}0}5+1$ 是完全平方数①。

7. 想一想：数字 0、a、b（a、b 不为零且不相同）能组成多少个大于 100 的三位数。证明所有这些三位数的和能被 211 整除。试一试，把这些三位数的和除以 211 所得的商找出来。

8. 有一堆糖果，如果三粒三粒地数，最后多出二粒；如果五粒五粒地数，最后多出三粒；如果七粒七粒地数，最后余四粒。问这堆糖果至少有几粒？

9. a 取 40 与 60 间的什么整数值时，分数 $\frac{a+8}{a-7}$ 不是最简分数。

*10. 对任何两个整数 a、b，试证：$a+b$、$a-b$、ab 三者之中至少有一个是 3 的倍数。

11. 在迎新联欢会上，1984位小朋友围成一个圆圈。联欢会的主持人小明手中拿着1984块糖果要发给这些小朋友。由于小明今年 12 岁，因此他别出心裁地决定按下述方法来发糖：小明从某一个小朋友开始发一块糖，然后按顺时针方向数数，每数到 12 时就发给一块糖。小明就如此循环不断地发糖，直到把 1984 块糖全部发完为止。现在请你想一想：是否每个小朋友都能得到糖？如果不是，那末只有多少个小朋友能得到糖？每人能得到多少块糖？

---

* 问题中，题号左上角标有 * 记号的表示该题难度比较高，下同。

① 一个整数 a，如果存在整数 n，使 $n^2=a$，那末 a 叫做完全平方数。

*12. 在有29个省市参加的全国篮球联赛上，能否安排出这样的场次，使每个队恰好参加奇数次比赛。

*13. 试证：$3^{10000}+4^{10001}$能被5整除。

*2. 辗转相除法

基本要点

1. 最大公约数与最小公倍数

几个数公有的约数叫做这几个数的公约数。几个数的公约数中，最大的一个叫做这几个数的最大公约数。a、b两数的最大公约数通常用(a、b)表示。

一个能同时被几个数整除的数，叫做这几个数的公倍数。几个数的所有公倍数(除零外)中，最小的一个叫做这几个数的最小公倍数。a、b两个数的最小公倍数通常用[a，b]表示。

(1) 最大公约数的求法：

分解质因数法：把几个数分别分解质因数，再把这几个数公有的一切质因数连乘起来。

辗转相除法：分解质因数法求最大公约数有着局限性，因为对有些数来说，例如，319与377，1351与139等，往往难以判断它们是否有公有的质因数，这时用分解质因数法求最大公约数是有困难的，可以改用辗转相除法(又叫欧几里得除

* 本书中有*记号的内容是初中代数中没有的，对这部分知识内容本书作了扼要的介绍，以扩大读者的知识面。

法）。

（2） 最小公倍数的求法：

分解质因数法：求几个数的最小公倍数，可以先取出它们公有的一切质因数，再取出其中的几个数公有的质因数，然后把所取出的公有的质因数和每数独有的因数连乘起来。

利用最大公约数法：先求出两个数的最大公约数，再除两个数的积，所得的商就是这两个数的最小公倍数。

2．最大公约数的性质

（1） 如果a能被b整除，则$(a,\ b)=b$。

（2） 如果$a=bq+r$，则$(a,\ b)=(b,\ r)$。

实际上，在余数公式$a=bq+r$（b为除数，q为商）里，根据乘法分配律可知，任何能整除b、r的公约数也一定能整除a，即b、r的公约数也一定是a、b的公约数；又因为$r=a-bq=a+(-b)q$，同样根据乘法分配律可知a、b的公约数也一定是b、r的公约数。这就是说，a、b的公约数与b、r的公约数是相同的，因此它们的最大公约数也是相同的，即$(a,b)=(b,r)$。

3．辗转相除法

如果有两个整数a、b（$a \geqslant b$），可用b去除a，如不能整除，得余数r_1，再用r_1去除b，如仍不能整除，得余数r_2，再用r_2去除r_1，……，直到余数等于零为止。最后一个不为零的余数就是所求的a、b两数的最大公约数。这种求最大公约数的方法叫辗转相除法。

例如，求 319 与 377 的最大公约数：

第一步：
$$\begin{array}{r|r|r|l} & 319 & 377 & 1 \\ & & 319 & \\ \cline{3-3} & & 58 & \end{array}$$
说明：∵377除以319，商1余58，
∴(377，319)=(319，58)。

第二步：
$$\begin{array}{r|r|r|l} 5 & 319 & 377 & 1 \\ & 290 & 319 & \\ \cline{2-3} & 29 & 58 & \end{array}$$
说明：∵319除以58，商5余29，
∴(319，58)=(58，29)。

第三步：
$$\begin{array}{r|r|r|l} 5 & 319 & 377 & 1 \\ & 290 & 319 & \\ \cline{2-3} & 29 & 58 & 2 \\ & & 58 & \\ \cline{3-3} & & 0 & \end{array}$$
说明：∵58除以29，商2，余数为零，
∴(58，29)=29。

∵ 最后一个不为零的余数为29，

∴ (319，377)=29。

上面辗转相除的过程，实际上第一步、第二步已包含在第三步的表示式中，因此不必把这两步分别写出来。

又如，
$$\begin{array}{r|r|r|l} 9 & 1351 & 139 & 1 \\ & 1251 & 100 & \\ \cline{2-3} 2 & 100 & 39 & 1 \\ & 78 & 22 & \\ \cline{2-3} 1 & 22 & 17 & 3 \\ & 17 & 15 & \\ \cline{2-3} 2 & 5 & 2 & 2 \\ & 4 & 2 & \\ \cline{2-3} & 1 & 0 & \end{array}$$

∵ 最后一个不为零的余数是1，

∴ (1351，139)=1。即这两个数互质。

4．辗转相除法的应用

(1) 求两个数的最大公约数。

(2) 求两个多项式的最高公因式。

用辗转相除法求两个一元多项式（变数字母只有一个的多项式）的最高公因式，它的过程与求两个数的最大公约数的过程相类似。

例如，求$x^4+4x^3+5x^2+4x+1$与x^3+x^2-5x-2的最高公因式，可先将$x^4+4x^3+5x^2+4x+1$除以x^3+x^2-5x-2，得余式$7x^2+21x+7$，再将x^3+x^2-5x-2除以$7x^2+21x+7$，…，直到余式为零为止。最后一个不为零的余式，就是原来两个多项式的最高公因式。这个过程可用竖式表示如下：

$$\begin{array}{r|r|r|l} x+3 & x^4+4x^3+5x^2+\ \ 4x+1 & x^3+x^2-5x-2 & \frac{1}{7}x-\frac{2}{7} \\ & x^4+4x^3-2x^2-17x-6 & x^3+x^2-5x-2 & \\ \cline{2-3} & 7x^2+21x+7 & 0 & \end{array}$$

∴　它们的最高公因式为 $7x^2+21x+7$，即

$x^2+3x+1$①。

分式约分时，通常是对分子、分母的多项式进行因式分解，然后再约分。但是如果当分子或分母的多项式的因式分解有困难时，就无法断定这个分式的约分能否进行。如果我们改用辗转相除法求出分子、分母多项式的最高公因式，那末不仅能进行分式的约分变换，而且能断定这个分式是否是最简分式（即分子、分母的最高公因式为零次多项式）。例如，在上面例子里的两个多项式的最高公因式为x^2+3x+1，因此分式

$$\frac{x^3+x^2-5x-2}{x^4+4x^3+5x^2+4x+1}$$

---

① 两个多项式的最高公因式并不是唯一的，但它们彼此都相差一个非零的常数倍。通常取系数最简单的一个为它们的最高公因式，如在本例中，取x^2+3x+1而不取$7x^2+21x+7$。

$$=\frac{(x^3+x^2-5x-2)\div(x^2+3x+1)}{(x^4+4x^3+5x^2+4x+1)\div(x^2+3x+1)}=\frac{x-2}{x^2+x+1}。$$

问　　题

1. 用辗转相除法求下列各组数的最大公约数：

   (1) 713与899；(2) 2231与3887；(3) 418、494与589。

2. 求出下列各分式中分子、分母的两个多项式的最高公因式，然后再约简分式：

   (1) $\frac{x^4+x^2+1}{x^6+x^4+x^3+x^2+1}$；(2) $\frac{x^3+5x^2+7x+2}{x^4+3x^3+2x^2+3x+1}$。

3. 已知两数的和等于477，它们的最大公约数为53，最小公倍数为742，求这两个数。

4. 已知a、b是80与200间的两个自然数，它们的差等于60，且$(a, b)=15$，求a与b的值。

5. 有一矩形花坛，长14.84米，宽10.60米。现在花坛四角及四周种花，使每株花之间的距离相等，且株距在100到200厘米之间。求能种花多少株？株距为多少？

6. 用96朵红花和72朵白花做成花束，如果各花束里红花与红花、白花与白花的朵数相同，每个花束里最少要有几朵花？

7. 甲、乙、丙三只船在八月一日同时从上海港出发航行，各船往返一次需要时间分别为7天、12天和14天。试问这三只船再次同时从上海港出发航行的最近日期是几月几日？

*3. 数的展开

基本要点

1. 十进位制记数法

我们已经知道，在十进位制里，任何一个自然数可以表示为各个计数单位（个、十、百、千、万，……）之和的形式。例如，

$$56724 = 5\text{个万} + 6\text{个千} + 7\text{个百} + 2\text{个拾} + 4\text{个}1$$
$$= 5\times10^4 + 6\times10^3 + 7\times10^2 + 2\times10 + 4,$$

这就是十进位制记数法。它是用0、1、2、3、4、5、6、7、8、9这些数字作为基本记数符号，采用10^0(个，即1)、10^1(拾)、10^2(百)、10^3(千)、10^4(万)…，这一系列10(这个10叫做十进位制的基数)的幂次的数作为计数单位，从而把任何一个自然数简单明了地表示出来。

象上面这种把一个数，写成各个计数单位之和的形式也叫做(在十进位制下的)数的展开。

2. 二进位制

在十进位制记数法中，10是基数，它的基本特征是逢十进一。如果我们用2作基数，那末就得到二进位制，即二进位制记数法。

二进位制的基本特征是逢二进一，它的基本记数符号只有0、1两个数字，采用1（即2^0)、2、2^2、2^3…，这一系列“2”的幂次的数作为计数的辅助单位，从而把一切自然数表示出来。

例如，因为 $3=1\times2+1\times1=1\times2^1+1\times2^0$，所以自然数“三”在二进位制中记作11；同理，因为 $4=1\times2^2+0\times2^1+0\times1$，$5=1\times2^2+0\times2^1+1\times1$，$6=1\times2^2+1\times2+0\times1$，…，所以自然数四、五、六…在二进位制中分别记作100、101、110…。下面表格表示了一些自然数在十进位制与二进位制下的不同记数形式：

自　然　数	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	……
十进位制记数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	……
二进位制记数	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	……

十进位制下的数与二进位制下的数可以互化。

（1） 二进位制中的数化成十进位制中的数。把二进位制下的数的第n数位上的数字乘以 2^{n-1}，然后求和，所得的值就是它在十进位制下的表示式。

例如，$(101)_2$① $=1\times2^2+0\times2^1+1=(5)_{10}=5$，

$(11010)_2=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2+0=26$，等等。

从上例可以看出，只要把二进位制中的数写成它的二进制展开式，再求和、求值，就得到它在十进位制的数。

（2） 十进位制中的数化成二进位制的数。

把十进位制下的数，用基数$r=2$来除：用 2 除原数，再用 2 除第一个商，又用 2 除第二个商，…，继续下去直到商等于 1 为止。这样把每次所得的余数（只能为 1 或 0）和最后的商 1，从右到左排列起来，就得到了这个数在二进位制下的数

① 我们用$(101)_2$表示它是在二进位制中的101。同样，在五进位制中的 101 用$(101)_5$表示。但是，在十进位制中的101一般不用$(101)_{10}$而直接表示为 101。