山东省教育委员会「九五」立项教材

模糊数学与经济分析

MO HU SHU XUE YU JING JI FEN XI

唐林炜 樊铭渠 赵明清 张来亮 高国成 编著

山东大学出版社

模糊数学与经济分析

唐林炜　樊铭渠　赵明清
张来亮　高国成
编著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学与经济分析/唐林炜,樊铭渠等编著.—济南:山东大学出版社,1999.9
ISBN 7-5607-2062-5

Ⅰ.模… Ⅱ.①唐… ②樊… Ⅲ.模糊数学-高等学校-教材 Ⅳ.O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 44948 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
山东安丘一中印刷厂印制
850×1168 毫米　1/32　6.25 印张　160 千字
1999 年 9 月第 1 版　1999 年 9 月第 1 次印刷
印数:1—1000 册
定价:10.00 元

前 言

模糊数学是一门新兴的学科，从它诞生至今仅有30多年，但它从理论到应用均取得了丰硕成果，特别在经济、社会科学领域所获得的成果更是令人瞩目。模糊数学的产生和发展，使数学渗透到更多科学领域，也使人们的数学观发生了巨大变革，看问题更加辩证，建立的许多模型更贴近人类自身的思维过程。

本书作为山东省高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革项目《模糊数学教学内容和课程体系研究与实践》的一部分内容，它为工科大学经济管理专业高年级学生及研究生提供了一本新的教材。

本书的目的是：通过此课程的学习，使经济管理专业高年级学生掌握模糊数学的基本概念，了解它的基本理论和方法，从而使学生初步掌握处理模糊现象的基本思想和方法，培养学生运用模糊数学方法分析和解决实际问题的能力。为了达到这一目的，在本书中突出了模糊数学和经济理论的联系与结合，给出了许多用模糊数学模型来分析和解决的实际经济管理问题，并且对模型的建立给予了充分地重视。书中还有一些作者的研究成果和心得，相信对读者也有一些启发作用。

全书共八章，第一、二章阐述了模糊数学的基本概念和原理，第三至八章给出了企业总体素质的评价、生产可能集、投入产出等的模糊数学模型，对模糊规划、模糊影子价格、模糊预测与决策等问题给出了分析与实例。

作为经济管理专业高年级学生选修课，根据我们的实践，讲授

一至六章的主要内容用35学时左右，如果有可能，安排10学时上机时间，让学生重新分析、计算各章后的实例是有益的。

在本书编写中，引用国内一些作者的论文、论著均在书后参考文献中列出，在此谨向作者表示诚挚的谢意。

在本书编写中，袁云耀、张孝令、吴哲辉、姚来昌、刘军、吴国华等专家学者给予我们热情的指导和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中不妥之处与错误之处在所难免，望读者批评指正。

作者

一九九九年五月

序

《模糊数学与经济分析》一书，是山东省高等教育面向二十一世纪教学内容和课程体系改革项目《模糊数学教学内容和课程体系研究与实践》的重要组成部分。其研究内容和理论体系都很有特色，其特色突出表现在，作者将模糊数学的理论与社会实践有机地结合了起来。这一点一直是过去教材编写中的薄弱环节。

这部著作编写难度很大，且具有重要的理论意义和现实意义。如何培养工科大学生建立完整的数学观一直是高校数学教育十分关注的课题。在过去，培养工科大学生数学观总是由传统数学担任的。传统数学的重要特点之一，是以形式逻辑的同一律、矛盾律和排中律为基础，要求客观事物"非此即彼"。为此，人们在用数学解决实际问题的过程中，舍弃事物本身特有的、或多或少存在的模糊性，把客观事物简单化，把思维过程绝对化、典型化，从而抛弃事物的"亦此亦彼"的模糊现象，只用理想状态"非此即彼"等进行研究和思考问题．这样一来，使得数学可以以二值逻辑为基础进行推理演算，并且取得了巨大成功。但是，与此同时，在数学思维走向非此即彼这一静止的、绝对化的过程中，人类也失去了他最为灵动最为辩证的思维优势。在这个背景下，模糊数学产生了。模糊数学坚持流变的观点，以崭新的理论和方法，冲破了传统数学的局限性，巧妙地处理了现实世界中存在的模糊现象，在许多领域中已经取得了令人瞩目的成果。它认为从认识的意义上说，客观世界本质上是复杂的、运动的，因而也是不确定的，难以用简单的、精确的方法去刻画。模糊数学正是在这一点上充分展示了自己巨大的潜力。遗

憾的是，目前高校工科数学教育还远远没有给予模糊数学教学应有的位置，更没有一本相应的教材。《模糊数学与经济分析》一书正是基于此而编著的，它不仅系统地介绍了模糊数学的基本内容和方法，而且通过实例选讲的方式将模糊数学的理论与社会实践紧密结合在一起，这对形成和完善大学生完整的数学观具有重要的意义。

总之，这是一部内容充实，有相当的深度和广度，在很多方面具有独特见解，论证比较充分，对高等学校模糊数学教学，对模糊数学爱好者都具有较大参考价值的著作。

煤炭部煤炭劳动定额委员会顾问
山东科技大学经济研究所所长 刘华 教授

目　录

第一章　模糊集合

第一节　模糊集合的概念

设 U 为论域，记 $P(U)$ 是 U 的幂集，即

$$P(U)=\{A \mid A\subseteq U\}$$

那么，元素 $u\in U$ 与普通集合 $A\in P(U)$ 之间是非此即彼的关系：要么 $u\in A$，要么 $u\notin A$，两者必居其一，且仅居其一。用特征函数来描述，就是

$$\chi_A: U\to\{0,1\}$$

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1, & u\in A\\ 0, & u\notin A\end{cases}$$

其中 χ_A 为 A 的特征函数。因此，普通集合所表达的概念是清晰的。但是，人们对客观事物的认识并不止于此，除了处理非此即彼的清晰概念之外，还要面对亦此亦彼的模糊概念。

例如，“比 0 大的所有实数”，这是一个清晰概念，它的外延用普通集合

$$A=\{x \mid x>0\}$$

表示。它指出凡大于 0 的实数都是 A 的成员，尽管 A 的元素无法一一列举，但范围是完全确定的。

若将上述概念改为“比 0 大得多的所有实数”，这就变成一个模糊概念了。人们无法划出严格分明的界限，使得在此界限内的实数都比 0 大得多，而其它实数都并非比 0 大得多。人们只能说某实

数比 0 大得多的程度高，另一实数比 0 大得多的程度低。例如，10^{10} 比 0 大得多的程度高于 10^9 比 0 大得多的程度。总之，对模糊概念而言，不能仿照清晰概念只用属于或不属于来确定它的所有成员。

用特征函数表示普通集合的实质是特征函数只取 0，1 二值，而模糊概念允许在属于与不属于之间存在中介状态。Zadeh 于 1965 年把用特征函数表示普通集合的方法进行了推广，用隶属函数表示模糊集合。

定义 1 在论域 U 上给定映射

$$\mu: U \to [0,1]$$
$$u \mapsto \mu(u)$$

则称 μ 确定了 U 上的一个模糊集合，又称为 U 的模糊子集，记作 $\underset{\sim}{A}$。并称 μ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数，也记作 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$；称 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 为 u 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，它表示 u 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度。

为了方便，约定 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) = \underset{\sim}{A}(u)$。

当 $\underset{\sim}{A}(u)=1$ 时，u 完全属于 $\underset{\sim}{A}$；当 $\underset{\sim}{A}(u)=0$ 时，u 完全不属于 $\underset{\sim}{A}$；$\underset{\sim}{A}(u)$ 越接近于 1，u 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度就越大。因此，隶属函数可看作是特征函数的拓广，相应地，模糊集合可看作是普通集合的拓广。或者说，特征函数是特殊的隶属函数，普通集合是特殊的模糊集合。

论域 U 上的模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 与普通集合 A 的差异，可以从 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 与 A 的特征函数 $\chi_A(u)$ 的曲线上明显看出，见图 1—1。

论域 U 上的模糊集合的全体称为 U 的模糊幂集，记作 $F(U)$，即

$$F(U) = \{\underset{\sim}{A} \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(u): U \to [0,1]\}$$

显然，$F(U)$ 是一个普通集合，且 $P(U) \subseteq F(U)$。

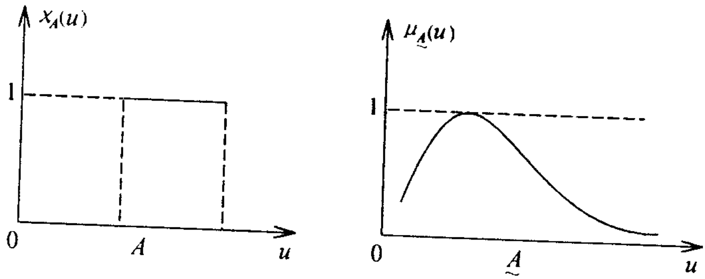

图 1—1

例 1　设论域 U 为实数域，则“比 0 大得多的所有实数”是 U 上的一个模糊集，记作 $\underset{\sim}{A}$。又设

$$\underset{\sim}{A}(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0\\ 1/(1+100/u^2), & u>0\end{cases}$$

见图 1—2。当 $u=-1$ 时，$\underset{\sim}{A}(-1)=0$，故 $u=-1$ 不属于 $\underset{\sim}{A}$；当 $u=10$ 时，$\underset{\sim}{A}(10)=0.5$，故 $u=10$ 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度为 0.5；当 $u=100$ 时，$\underset{\sim}{A}(100)=0.99$，故 $u=100$ 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度为 0.99。

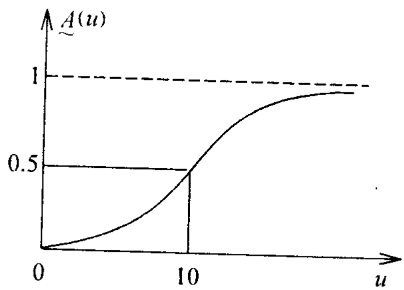

图 1—2

例 2　“年轻”是一个模糊概念，可用年龄论域 $U=[0,200]$ 上的模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 来描述它。令

$$\underset{\sim}{A}(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 25\\ (1+((u-25)/5)^2)^{-1}, & 25<u\leqslant 200\end{cases}$$

见图 1—3。这意味着 25 岁以下完全属于“年轻”；50 岁属于“年轻”的程度为 3.8%。

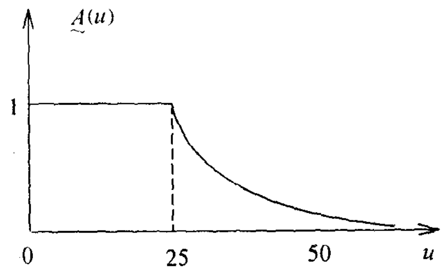

图 1—3

模糊集合的具体表达方式有若干种：

1. 论域 U 为有限集

设 $U=\{u_1,\cdots,u_n\}$，则 $\underset{\sim}{A}\in F(U)$ 表示如下：

(1)Zadeh 表示法

$$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}(u_1)/u_1+\cdots+\underset{\sim}{A}(u_n)/u_n$$

其中 u_i 为 U 中元素，$\underset{\sim}{A}(u_i)/u_i$ 表示 u_i 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度为 $\underset{\sim}{A}(u_i)(i=1,\cdots,n)$，并非分数，隶属度为 0 的项可略去；符号“+”并非加法，而是把 $\underset{\sim}{A}$ 看作一个整体，仅起联接作用。

例 3　设 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\underset{\sim}{A}\in F(U)$，且

$\underset{\sim}{A}(1)=0,\underset{\sim}{A}(2)=0.2,\underset{\sim}{A}(3)=0.8,\underset{\sim}{A}(4)=1,\underset{\sim}{A}(5)=0.8,$

$\underset{\sim}{A}(6)=0.2$

则 $\underset{\sim}{A}$ 可表示为

$$\underset{\sim}{A}=0/1+0.2/2+0.8/3+1/4+0.8/5+0.2/6$$

(2)序偶表示法

$$\underset{\sim}{A}=\{(\underset{\sim}{A}(u_1),u_1),\cdots,(\underset{\sim}{A}(u_n),u_n)\}$$

如例 3 中的$\underset{\sim}{A}$可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\{(0,1),(0.2,2),(0.8,3),(1,4),(0.8,5),(0.2,6)\}$$

(3)向量表示法

$$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}(u_1),\cdots,\underset{\sim}{A}(u_n))$$

注意:元素次序固定,隶属度为 0 的项不能舍弃。这时,也称$\underset{\sim}{A}$为模糊向量。

如例 3 中的$\underset{\sim}{A}$可表示为

$$\underset{\sim}{A}=(0,0.2,0.8,1,0.8,0.2)$$

(4)Zadeh 表示法和向量表示法结合

$$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}(u_1)/u_1,\cdots,\underset{\sim}{A}(u_n)/u_n)$$

如例 3 中的$\underset{\sim}{A}$可表示为

$$\underset{\sim}{A}=(0/1,0.2/2,0.8/3,1/4,0.8/5,0.2/6)$$

2. 论域 U 为无限集

(1)U 为无限可列集,即 $U=\{u_1,\cdots,u_i,\cdots\}$,$\underset{\sim}{A}\in F(U)$的表示法只需把情况 1 中的表示法稍加修改即可,例如

$$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}(u_1)/u_1+\cdots+\underset{\sim}{A}(u_i)/u_i+\cdots$$

(2)U 为无限不可列集,设$\underset{\sim}{A}\in F(U)$,则$\underset{\sim}{A}$可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(u)}{u}$$

其中$\underset{\sim}{A}(u)/u$ 不是被积函数,更不是分数,而是元素 u 与其隶属度$\underset{\sim}{A}(u)$之间的对应;符号“$\int$”既不表示积分,也不表示求和,仅表示

元素 u 与其隶属度$\underset{\sim}{A}(u)$间的对应关系的一个总括，此记号对 U 的各种情况都适用。

如例 1 中的$\underset{\sim}{A}$可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\int_{u\leq 0}\frac{0}{u}+\int_{u>0}\left[\frac{1}{1+100/u^2}\right]/u=\int_{u>0}\left[\frac{1}{1+100/u^2}\right]/u$$

普通集合间有相等、包含关系：设 A，$B\in P(U)$，A 和 B 相等，指的是 A 和 B 所包含的元素完全相同，记作 $A=B$；A 包含于 B（B 包含 A），指的是 A 中的元素都是 B 中的元素，记作 $A\subseteq B$。

显然，$A=B$ 的充要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

考虑到特征函数，有

$$A=B\Leftrightarrow\chi_A(u)=\chi_B(u),\ A\subseteq B\Leftrightarrow\chi_A(u)\leqslant\chi_B(u)$$

推而广之，就有：

定义 2　设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in F(U)$

(1)若$\forall\ u\in U$，都有$\underset{\sim}{B}(u)\geqslant\underset{\sim}{A}(u)$，则称$\underset{\sim}{B}$包含$\underset{\sim}{A}$，记作$\underset{\sim}{B}\supseteq\underset{\sim}{A}$；

(2)若$\forall\ u\in U$，都有$\underset{\sim}{A}(u)=\underset{\sim}{B}(u)$，则称$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$相等，记作$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$。

容易证明

$$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}，且\underset{\sim}{A}\supseteq B$$

$\underset{\sim}{A}\supseteq\underset{\sim}{B}$的含义：$U$ 中任一元素 u 属于$\underset{\sim}{A}$的程度都不低于属于$\underset{\sim}{B}$的程度；

$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$的含义：$U$ 中任一元素 u 属于$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的程度是相同的。

例 4　设

$$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$$

$$\underset{\sim}{A}=0.4/u_1+0.3/u_2+0.8/u_3+0.7/u_4$$

$$\underset{\sim}{B}=0.2/u_1+0.3/u_2+0.6/u_3+0.5/u_4$$

那么$\underset{\sim}{A}\supseteq\underset{\sim}{B}$。

第二节 模糊集合的运算

设 $A, B \in P(U)$，普通集合的并、交、补运算分别是：

并：$A \cup B = \{u \mid u \in A$ 或 $u \in B\}$

交：$A \cap B = \{u \mid u \in A$ 且 $u \in B\}$

补：$A^c = \{u \mid u \notin A\}$

用特征函数描述，便有

$$\chi_{A \cup B}(u) = \chi_A(u) \vee \chi_B(u)$$

$$\chi_{A \cap B}(u) = \chi_A(u) \wedge \chi_B(u)$$

$$\chi_{A^c}(u) = 1 - \chi_A(u)$$

其中 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别表示取最大和取最小。类似地，因为模糊集合是由隶属函数来定义的，所以借助于隶属函数来定义模糊集合的运算就是一件十分自然的事情。

定义 1 设 $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in F(U)$，把 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的并记作 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$，其隶属函数

$$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})(u) = \underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{B}(u)$$

$\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的交记作 $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$，其隶属函数

$$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})(u) = \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u)$$

$\underset{\sim}{A}$ 的补记作 $\underset{\sim}{A}^c$，其隶属函数

$$\underset{\sim}{A}^c(u) = 1 - \underset{\sim}{A}(u)$$

定义的合理性是显然的，图 1—4 是定义的几何解释。

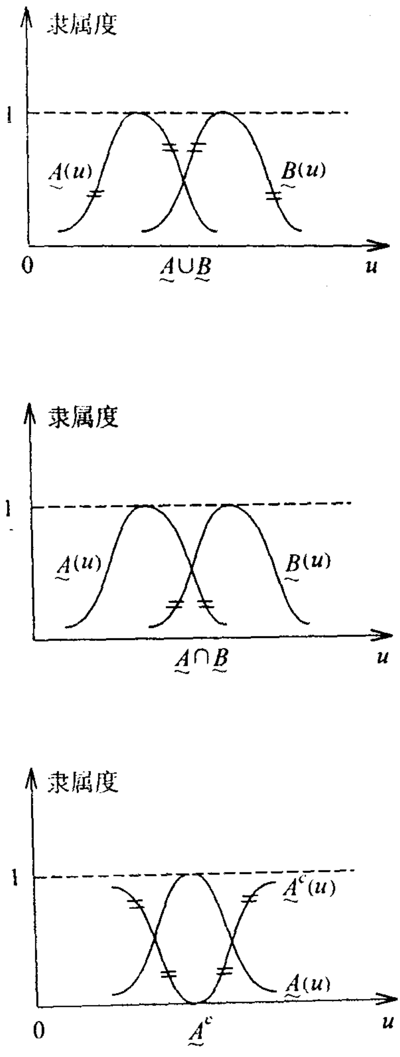

图 1—4