教育部《中学数学实验教材》

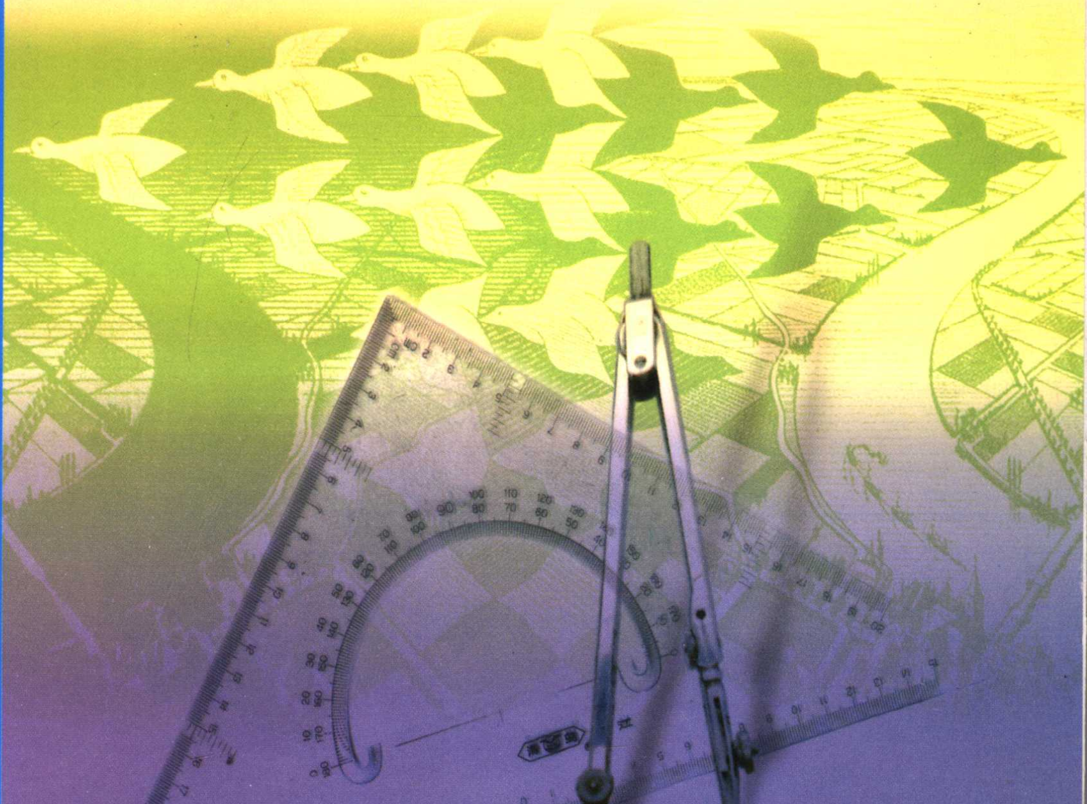
SHUXUE

全日制普通高级中学教科书（试验本·必修＋选修Ⅰ）

数学

SHUXUE 第三册（文）

教育部《中学数学实验教材》研究组 编著



北京师范大学出版社

数学

原国家教委《中学数学实验教材》

全日制普通高级中学教科书(试验本·必修+选修I)

教育部《中学数学实验教材》研究组　编著

数学

第三册

(文)

北京师范大学出版社

北　京

全日制普通高级中学教科书(试验本·必修+选修Ⅰ)
数　学
第三册(文)
北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街19号　邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
丰润印刷有限公司印装　全国新华书店经销
开本:787 mm×1 092 mm　1/16　印张:11.75　字数:300千字
2002年3月第1版　2002年3月第1次印刷
印数:1～5 000册　定价:9.75元

前　言

这套高中数学教材是在教育部基础教育司的组织领导下，于1980年初，根据美国加州大学伯克莱分校数学系项武义教授的设想和初纲，由本教材实验研究组广泛听取了专家和中学数学界有丰富经验的教研员、教师的意见，集体讨论、分工编写而成的，并从1982年开始，在全国近20个省、市、自治区进行了十多年的实验教学。在吸取各地使用教材的宝贵经验的基础上，前后经过三次调整修订，于1993年正式出版，并被原国家教委推荐为全国高中数学教学和中学数学教师进修的参考书。

这套教材还特别于1989～1992年进行了一轮有组织、有计划的严格实验教学，完善和充实了有益于中学生学好基础、提高能力的内容和训练，使教材更具有特色。经过三年教学，实验班进行了单独命题的高考，取得了优良成绩，同时也为这套教材的修订及教学参考书的编写提供了丰富的经验和资料。

这套教材的本次重新修订是总结十多年的教学实验经验和实验研究成果，根据教育部最新颁发的“全日制普通高级中学数学教学大纲（试验修订稿）”的精神，为适应我国当前高中数学教学改革的新形势和新要求而进行的。教材经教育部中小学教材审定委员会审读通过，全套教材尚待审查。

本教材的指导思想是：精简实用，返璞归真，顺理成章，深入浅出，注重实践能力和创新精神的培养。

精简实用——科学地体现了理论与实践的正确关系。由实践到理论就是由繁到简；精而简的理论才能以简驭繁。这是本教材在选材和教学处理上的原则。

返璞归真——就是着重于学习基础数学的本质，而不拘泥于抽象的形式。

顺理成章——就是从历史发展程序和认识的规律出发，自然地处理教材。力求顺理成章，注意提前渗透后面的重要概念和思想，为后面的学习预先做准备，使学习能比较顺利。同时，兼顾分析、综合、推理三种方法，以便真正掌握数学的精神实质和思想方法，培养思考能力。

深入浅出——只有学习到应有的深度才能浅出，其要点在于用易于接受的形式去掌握枢纽性的理论。

这套教材的教学目的、教学内容的确定和安排、教学中应注意的几个问题、教学测试和评估均与部颁大纲保持一致；教学内容和教学目标均源于大纲，包含了大纲中的必修与选修Ⅰ、Ⅱ的所有内容。教材中带“*”号的部分是有特色的辅助内容，供教学中结合实际、灵活掌握选学；教材中的阅读材料为“弹性”内容，供学有余力的学生阅读自学。

这套教材在本次修订中，特别注意了以下事项：

1. 注意保持了本教材的特色。

(1) 数学知识结构的整体性、系统性强。

(2) 重视数学上的通性、通法；在知识的展开上突出基本数学思想和数学方法，理论性较强；体现知识教学和能力培养的统一。

(3) 尽力体现和渗透现代数学观点，使教材的科学性和发展性达到较高水平。

2. 教材中增加了应用题、研究题、探索性课题，尽力重视个性品质、科学态度、创新精神的培养和辩证唯物主义的教育。

3. 在内容上，删减了本教材原有的超纲内容，降低了难度。在保持原有教材特色的基础上，着眼于代数、几何、分析、概率与统计 4 个基础学科，选其精要基础的内容；但在教材的编排体系上，采取与部颁大纲基本一致的不分学科、统一处理、穿插安排的系统。

这套教材共分 3 册共 6 本，其主要内容分别是：

第一册（上）　集合与逻辑初步；不等式；函数。

第一册（下）　指数函数与对数函数；三角函数。

第二册（上）　平面向量；直线和圆的方程；圆锥曲线方程。

第二册（下）　立体几何；数列。

第三册（理）　复数；排列、组合及二项式定理；概率与统计初步；极限与连续；导数与微分；求和与积分。

第三册（文）　排列、组合及二项式定理；概率与统计初步；极限与导数。

第三册是供高中三年级使用的全一册，其中，第三册（理）的内容是大纲中的部分必修内容加选修Ⅱ，供高三理工方向的学生使用；第三册（文）的内容是大纲中的部分必修内容加选修Ⅰ，供高三文、实方向的学生使用。

参加修订编写的有丁尔陞、李建才、高存明、罗声雄、邱万作、万庆炎、叶尧城等同志。

热忱地欢迎大家使用这套教材，希望提出意见与建议，为提高我国数学基础教育水平共同努力。

教育部《中学数学实验教材》研究组

目　录

第十一章

排列、组合及二项式定理

§1 排 列

1.1 加法原理和乘法原理

一、加法原理

从甲地到乙地，人们可以乘火车、轮船或长途汽车．火车每天有2班，轮船每天有3班，长途汽车每天有4班．如果仅限这三种交通工具，那么某人今天欲从甲地到乙地共有多少种不同的方案？

因为从甲地到乙地，乘火车有2种不同的走法，乘轮船有3种不同的走法，乘长途汽车有4种不同的走法，每一种走法都可以到达目的地，因此，共有

$$2+3+4=9$$

种不同的方案，如图11-1所示．

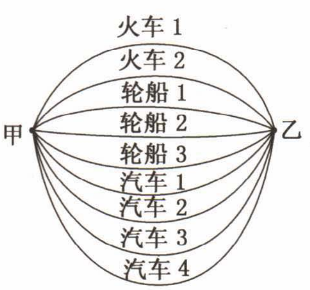


图 11-1

一般地说，有如下结论：

【加法原理】如果完成某件事有 n 类办法，在第1类办法中有 m_1 个不同的方案，在第2类办法中有 m_2 个不同的方案，…… 在第 n 类办法中有 m_n 个不同的方案，那么完成这件事情共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

个不同的方案.

例 1 甲 A 某足球队连续三场比赛，场场进球，三场共进 7 个球. 问该队进球情况有多少种？

解 第一场进 1 个球，第二场与第三场进球情况有 (1,5)，(2,4)，(3,3)，(4,2)，(5,1)，共 5 种；第一场进 2 个球，另两场进球情况有 (1,4)，(2,3)，(3,2)，(4,1)，共 4 种；第一场进 3,4 或 5 个球，第二，三场进球情况分别有 3,2,1 种. 按加法原理，所有不同进球情况有

$$5+4+3+2+1=15(\text{种}).$$

答：共有 15 种不同的进球情况.

例 2 展开 $(a+b+c+d)^2$，合并同类项以后，有多少项？

解 展开 $(a+b+c+d)^2$ 且合并同类项后的项可分为两类，即项中含 a 和不含 a 的两类.

含 a 的项有 4 项，即 a^2，ab，ac，ad；不含 a 的项有 6 项，即 b^2，c^2，d^2，bc，bd，cd. 根据加法原理，共有

$$4+6=10(\text{项}).$$

答：共有 10 项.

二、乘法原理

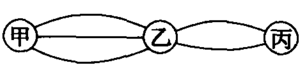


图 11-2

假如从甲地到乙地有 3 条道路，从乙地到丙地有 2 条道路，如图 11-2 所示，问某人从甲地经过乙地到丙地有几种不同的走法？

从甲地到乙地有 3 种不同的走法，按这 3 种走法中的每一种走法到达乙地后，再从乙地到丙地又有 2 种不同的走法，因此从甲地经乙地到丙地共有

$$3\times 2=6$$

种不同的走法.

一般地，有如下结论：

【乘法原理】 做一件事情，完成它需要经过 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方案，做第 2 步有 m_2 种不同的方案，…… 做第 n 步有 m_n 种不同的方案，那么完成这件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方案.

例 3 设 $n=3^3\cdot 5^5$,问 n 有多少个因数(除 1 和 n 之外)?

解 3的指数可取 0, 1, 2, 3,共 4 种取法,按其中的每一种取法,5 的指数可取 0, 1, 2, 3, 4, 5 六个数,根据乘法原理知,共有 $4\times 6=24$ 个因数,去掉 1 和 n,还有 22 个.

答:n 含有 22 个(真) 因数.

例 4 四边形 $ABCD$ 为圆的内接四边形,一小虫沿着圆周或四边形 $ABCD$ 的边从点 A 爬到点 C,问有几条不同的路径?(不能再回到点 A 或来回爬行)

解 如图 11-3,分经点 B 到点 C 和经点 D 到点 C 两类爬法:

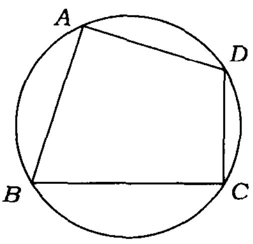


图 11-3

由点 A 到点 B,由点 B 到点 C 各有 2 条路径,按乘法原理,有 $2\times 2=4$(条) 路径完成爬行;

同理,由点 A 经点 D 到点 C 有 $2\times 2=4$(条) 路径. 根据加法原理,共有

$$4+4=8(\text{条}).$$

答:共有 8 条不同的爬行路径.

加法原理和乘法原理都是解决有关完成一件事的方案种数问题. 所不同的是:如果完成一件事有 n 类方法,各类方法彼此无关,每类方法又分别有若干个不同的方案,任选一个方案都可以完成这件事,那么用加法原理计算方案个数;如果完成一件事必须经过 n 个步骤,每个步骤又分别有 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 个不同的方案,对于第一步的每一个方案,第二步有 m_2 个方案与之匹配,因此完成第一步和第二步共有 m_1m_2 个方案,对于 m_1m_2 个方案中的每一个,第三步又有 m_3 个方案与之匹配,故完成第一、二、三步有 $m_1m_2m_3$ 种不同方案,如此继续,那么计算完成这件事的方案总数,则应该用乘法原理.

练习

1. 完成某项工作，甲有 2 种不同方案，乙有 3 种不同方案，丙有 4 种不同方案，并且彼此的方案都不同，问完成这件工作，共有几种不同的方案？
2. 用 0,1 编 16 位号码(各位都可以是 0)，总共有多少个不同的号码？
3. 乘积$(a+b)(c+d+e)(m+n+p+q)$展开后有多少项？
4. 甲地到乙地有 1 条道路，乙地到丁地有 2 条道路，甲地到丙地有 3 条道路，丙地到丁地有 4 条道路. 若从甲地到丁地必须经过乙地或丙地，问从甲地到丁地共有多少种不同的走法？
5. 某人写好了 4 封不同的信和相应的 4 个不同地址的信封，他稀里糊涂地都装错了，问全装错了的不同装法有多少种？
6. 设 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_n^{m_n}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是彼此不同的质数，问 n 的不同约数(包括 1 和 n)有多少个？

1.2 排列

定义 从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**.

例如，由 1,2, 3 三个不同的数字中任取两个数字写成两位数. 其中 1,2,3 是三个不同的元素，那么，12 与 21 是由选出的两个不同元素 1 与 2 组成的两个不同的排列. 同样，13,31;23,32 都是符合要求的不同排列.

只有用相同的元素，又按相同的顺序组成的排列，才叫做相同的排列. 例如 123 与 123 是相同的排列，而 123 与 213 是不同的排列.

例 1　由数字 1,2,3,4 可以组成多少个没有重复数字的两位数?

分析　要排出两位数,第一步先要安排十位数上的数字(当然也可以先安排个位数),第二步是确定个位数上的数字.

解　第一步,在十位数的位置上 1,2,3,4 都可以选用,故共有 4 种不同的方案;

第二步,安排个位数上的数字.因为题中要求数字不得重复,只有剩下的三个数字可供选用,因此,对于选定的十位数上的每一个数字,都有 3 个数字可以放置在个位上,从而组成不同的两位数.

按照乘法原理,方案总数为 $4\times3=12$.故以 1,2,3,4 可以排出没有重复数字的 12 个不同的两位数.如图 11-4 所示.

$$\begin{cases}1\quad 2\\1\quad 3\\1\quad 4\end{cases}\qquad\begin{cases}2\quad 1\\2\quad 3\\2\quad 4\end{cases}\qquad\begin{cases}3\quad 1\\3\quad 2\\3\quad 4\end{cases}\qquad\begin{cases}4\quad 1\\4\quad 2\\4\quad 3\end{cases}$$

图　11-4

例 2　从 a, b, c, d 4 个元素中,任取 3 个元素的不同排列有多少种?并写出所有的排列.

解　从 4 个不同元素中任取 3 个元素的排列,要分三步完成.第一步先在第一个位置上安排 1 个元素,应有 4 个不同的方案;第一步完成后,第二个位置只有剩下的 3 个元素可供选用,因此,第二步有 3 个不同方案;在前两步完成后,第三个位置只剩下 2 个元素可供选用,即完成第三步有 2 个方案.按乘法原理,共有 $4\times3\times2=24$ 种不同排列.如图 11-5 所示.

$$a\begin{cases}b\begin{cases}c\\d\end{cases}\\c\begin{cases}b\\d\end{cases}\\d\begin{cases}b\\c\end{cases}\end{cases}\qquad b\begin{cases}a\begin{cases}c\\d\end{cases}\\c\begin{cases}a\\d\end{cases}\\d\begin{cases}a\\c\end{cases}\end{cases}\qquad c\begin{cases}a\begin{cases}b\\d\end{cases}\\b\begin{cases}a\\d\end{cases}\\d\begin{cases}a\\b\end{cases}\end{cases}\qquad d\begin{cases}a\begin{cases}b\\c\end{cases}\\b\begin{cases}a\\c\end{cases}\\c\begin{cases}a\\b\end{cases}\end{cases}$$

图　11-5

具体排列如下：

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

一般地说，从 n 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素（不许重复）的所有不同排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**. 用符号 A_n^m 表示.

定理 1 从 n 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个没有重复元素的排列数 $\mathrm{A}_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$.

证明 m 个元素排成一列时，第一个位置可选用 n 个不同元素中的任何一个，共有 n 个不同方案，在第二个位置上，可选用余下的 $n-1$ 个元素中的任何一个，共有 $n-1$ 个 方案；如此类推，在最后的第 m 个位置上，只有 $n-(m-1)$ 个元素供选用，即有 $n-m+1$ 个方案. 依乘法原理，所有不同排列的个数

$$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

这里，n,m 是正整数，$n\geqslant m$，这个公式叫**排列数公式**.

特别地，当 $m=n$ 时，有公式

$$\mathrm{A}_n^n=n(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

这是从 n 个不同的元素中，全部取出参加排列的排列数，叫做 n 个不同元素的**全排列数**. 从 1 到 n 的全部正整数的连乘积叫做 **n 的阶乘**，用 $n!$ 表示. 因此全排列数公式可简写成

$$\mathrm{A}_n^n=n!.$$

这样，排列数公式又可以写成

$$\mathrm{A}_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

注意 当 $m=n$ 时，分母 $(n-m)!$ 就变成 $0!$，

为使公式仍然成立，特别规定 $0!=1$.

例如：$A_8^5=8\times7\times6\times5\times4=6\ 720$；

$A_5^5=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$；

$A_5^3=\dfrac{5!}{(5-3)!}=60$.

下面是我们经常要用到的阶乘公式，必须熟练掌握，由阶乘的定义，可以立即得到以下的恒等式.

(1) $(n+1)n!=(n+1)!$；

(2) $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$；

(3) $(m-1)\cdot(m-1)!+(m-1)!=m!$；

(4) $n!=n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)!$.

例 3 证明下列等式：

(1) $A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m(m\leqslant n)$；

(2) $A_{n+1}^{n+1}-A_n^n=n^2A_{n-1}^{n-1}$.

证明 (1) $A_n^m+mA_n^{m-1}$

$$=\frac{n!}{(n-m)!}+m\cdot\frac{n!}{(n-m+1)!}$$

$$=\frac{(n-m+1)\cdot n!+m\cdot n!}{(n-m+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n!}{[(n+1)-m]!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{[(n+1)-m]!}$$

$$=A_{n+1}^m.$$

(2) $A_{n+1}^{n+1}-A_n^n=(n+1)!-n!$

$$=(n+1)\cdot n!-n!$$

$$=n\cdot n!$$

$$=n^2(n-1)!$$

$$=n^2A_{n-1}^{n-1}.$$

例 4 用 0 到 9 十个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？其中有多少个偶数？

解 (1) 第一步，因为 0 不能放在百位的位置上，所以，百位上的数字只有 9 种选法.

第二步，从余下的九个数字中任选两个数作为十位